Linienmessung auf Karten

Inaugural-Dissertation,

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Fritz E. Mouths
aus Düsseldorf

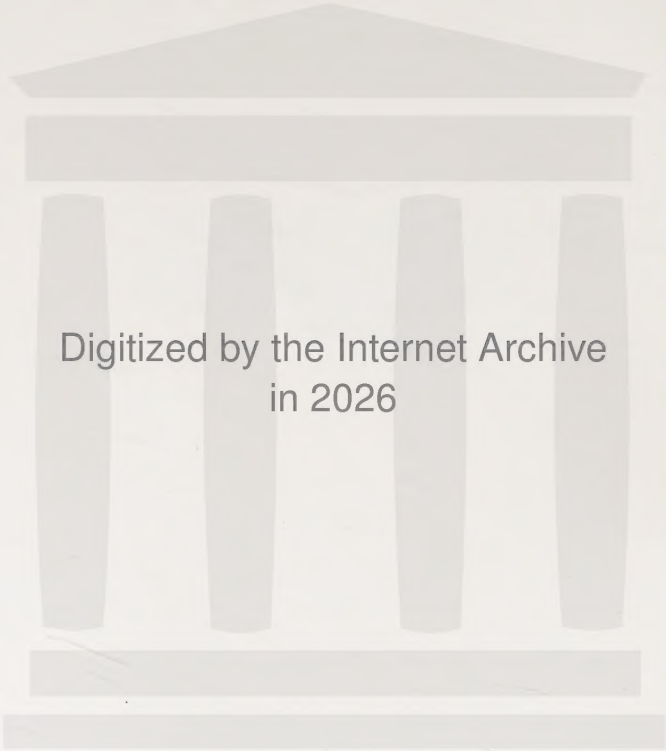
ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Stuttgart
Druck von Strecker & Schröder
1912

Referent: Professor Dr. Ule

Herrn Dr.-Ing. Max Dreger,
Groß-Lichterfelde bei Berlin,
in alter Verehrung
gewidmet

▽


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553620_0018

Inhalt.

Seite

Vorwort und Einleitung 1
Instrumente und Verfahren zum Messen der Länge von Linien 4
Allgemeines 4
Besonderes Verfahren beim Gebrauch des Zirkels zum Messen vielfach gekrümmter Linien 5
Kurvimeter 6
Eingeführte Meßverfahren 9
Einfluß des Maßstabes und des Gradnetzentwurfes . . 10
Messungen auf dem Globus 10
Korrektionsfaktor beim Globus 12
Messungen auf der Karte 15
Der Einfluß des Maßstabes 15
Übereinstimmung von Kartenbild und Globusausschnitt 16
Ungenauigkeit der Verjüngungsverhältnisse und ihre Prüfung . . 18
Generalisierung 22
Objekte der geographischen Linienmessung 26
Orometrische Messungen 27
Einfluß des Gradnetzentwurfes 30
I. Allgemeines 30
II. Azimutale Projektionen 35
1. Die mittabstandstreue, von Breusing speichentreue genannte Projektion 35
2. Die orthographische oder reifentreue Azimutalprojektion . . . 36
3. Die gnomonische Projektion 37
4. Lamberts flächentreue Azimutalprojektion 38
5. Die winkeltreue (stereographische) Projektion 39
6. Breusings vermittelnde Azimutalprojektion 40
III. Kegelprojektionen 43
1. Die einfache oder gewöhnliche mittabstandstreue Kegelprojektion 44
2. Die konische Projektion von De l'Isle (Delisle) 45
3. Flächentreue Kegelprojektionen 47
4. Die winkeltreuen echten Kegelprojektionen 52
5. Unecht konische Entwürfe 54
6. Die polykonischen Entwürfe 56
IV. Zylinderprojektionen 59
1. Allgemeines 59
2. Die quadratische Plattkarte 60

Seite

3. Die rechteckige Plattkarte 62
4. Reduktion geradliniger azimutaler Entfernungen der Plattkarte auf ihre wahren orthodromischen 64
5. Mercatorprojektion 69
6. Unechte Zylinderprojektionen 75

Linearveränderung für beliebiges Azimut 83
Entwicklung der Linearveränderung für beliebiges Azimut bei zwei echten Zylinderprojektionen 83

Folgesätze 90

Anlage 1. Flußlängen 92
Quellennachweis zur Anlage 1 93

Anlage 2. Kurvimetrische Längenmessungen von Flußläufen im Vergleich mit den entsprechenden geodätisch aufgenommenen Werten . . . 97

Anlage 3. Geometrische Darstellung der Orthodrome in der orthographischen Projektion 98

Anlage 4. Entwicklung der Gleichung der Kurve, welche die Projektion der Orthodrome auf den die Erdkugel im Aquator berührenden Zylinder bildet 100

Anlage 5. Vergleich loxodromischer und orthodromischer Entfernungen 102

Anlage 6. Airys Hilfstabelle zur Konstruktion des Hauptbogens auf der Mercatorkarte 103

Vorwiegend benützte Literatur 104

Vorwort und Einleitung.

Die vorliegende Arbeit will bei den Linienmessungen auf Karten nach einer kurzen Abhandlung über Meßinstrumente und Meßverfahren den Einfluß des Maßstabes und des Gradnetzentwurfes, namentlich hinsichtlich der Genauigkeit und der durch die Projektionsart bedingten Linearverzerrung, behandeln. Sie versteht unter Karten, vom Globus ausgehend, geographische, topographische und nautische. Dementsprechend stützt sie sich vor allem auf die grundlegenden Arbeiten von Tissot[1], Fiorini[2] und Hammer[3]. Sie verzichtet, abweichend von den Schriften von Schmiedeberg und Willers, die ein analoges kartometrisches Thema, nämlich Flächenmessungen[4], behandeln, auf eine historische Darstellung. Auch sollen die Maßeinheiten und Maßreduktionsfaktoren, weil darüber reichlich Literatur[5] existiert, unerörtert bleiben.

Bei den Karten für die zu behandelnden Linienmessungen wird als von etwas Vorhandenem — Gegebenem — ausgegangen werden, ohne Rücksicht darauf, wie sie geworden sind. An sich ist es für die Messungen natürlich keineswegs gleichgültig, auf welche Weise die Karten entstanden sind, ob auf topo-

---

[1] Tissot, A., La représentation des surfaces et les projections des cartes. Paris 1881.

Tissot-Hammer, Die Netzentwürfe geographischer Karten. Stuttgart 1887.

[2] Fiorini, M., Le projezioni delle carte geografiche. Bologna 1881.

[3] Hammer, E., Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen. Stuttgart 1889.

[4] Schmiedeberg, W., Zur Geschichte der geographischen Flächenmessung bis zur Erfindung des Planimeters. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde, Berlin, 1906 Nr. 3 u. 4.

Willers, Th., Zur Geschichte der geographischen Flächenmessung seit Einführung des Planimeters. Erg.-Heft 170 zu Petermanns Mitteilungen. Gotha 1911.

[5] Zuletzt im Zusammenhang mit Flächenmessungen erörtert in der vorgenannten Schrift von Willers S. 59 ff.

graphischen Aufnahmen, auf Itineraren beruhend, ob die eine oder andere in großem oder kleinem Maßstabe ausgeführt ist, ob viele oder wenige Punkte astronomisch oder geodätisch festgelegt worden sind u. dgl. Es bleibt also die gesamte Zusammenverarbeitung[1] außer Betracht. Eine weitere Begrenzung des Themas besteht darin, daß sämtliche Messungen auf die Horizontale, d. h. auf den ideellen Meeresspiegel bezogen gelten sollen. Da, wo terrestrische Maße ohne nähere Erläuterung angeführt sind, sind die Dimensionen des Erdsphäroids nach Bessel[2] zugrunde gelegt.

Das Messen von Linien auf Karten bildet einen wesentlichen Teil der geographischen Hilfswissenschaft der Kartometrie und ist im Gegensatz zum Messen von Flächen nur wenig behandelt worden. Es ist dies auch begreiflich, da das Messen von Flächen eine ungleich größere Bedeutung für den Geographen, Kartographen und Statistiker hat. In der eigentlichen geographischen Lehrbuchliteratur dürfte H. Wagner der erste und einzige sein, der in seinem Lehrbuch der Geographie die Kartometrie auch hinsichtlich der Linienmessungen ziemlich eingehend in einem besonderen Kapitel vom Standpunkt des praktischen Geographen behandelt.

Fiorini, der den Standpunkt des Geodäten nie verleugnet, beschränkt seine Längenmessungen auf vielfach gekrümmte Linien. Er nimmt explizite die Bestimmung der kürzesten Entfernung zweier Punkte auf der Karte — Orthodrome — und ebenso die Bestimmung des Verlaufs und der Länge der Loxodromen aus. Demgegenüber wird sich Verfasser auch mit diesen beiden Problemen, von denen das letztere freilich nur für nautische Karten in Betracht kommt, befassen.

Bei den Formeln der verschiedenen Gradnetzentwürfe wurde angestrebt, die Gleichungen in die Anschauung zu übertragen, also die mathematischen Begriffe möglichst in geographische zu verwandeln.

---

[1] Zöppritz-Bludau II 20.

[2] Auf die geringen Unterschiede zwischen den verschiedenen Erddimensionen für das Kartenbild und die Messungsergebnisse hat Hermann Wagner im Geographischen Jahrbuch III, Gotha 1870, Anhang S. XI—XIII hingewiesen. S. auch Willers, S. 14.

Vor dem Eintritt in das Hauptthema seien einige häufiger wiederkehrende Begriffe und technische Synonyma hier zur Festlegung der Nomenklatur noch kurz erörtert:

Man nennt den größten Kreis (Großkreis) auf der Kugel Hauptbogen oder Orthodrome = rechtläufige Linie, und er ist zugleich kürzeste Entfernung auf der Sphäre. Von orthodromischer Berechnung, die sich ohne Schwierigkeiten mit der sphärischen Trigonometrie bewerkstelligen läßt, handeln fast alle Lehrbücher der nautischen Astronomie und der Kartographie. Vgl. z. B. Zöppritz-Bludau, Leitfaden der Kartenentwurfslehre, II. Aufl., I. Bd., § 10 ff.

Diese kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten geht aber in eine ganz anders geartete Raumkurve über, sobald man den geodätischen Problemen die wahre Erdgestalt, nämlich das Erdellipsoid, zugrunde legt. Man nennt sie bekanntlich geodätische Linie, und ihr Studium hat nicht uninteressante mathematische und physikalische Eigenschaften ergeben, die man in den Kompendien der Flächentheorie und analytischen Mechanik findet. Es sei in dieser Hinsicht nur auf den Satz von Clairault hingewiesen, den der berühmte Geodät J. J. von Baeyer in seiner Schrift: Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche, Berlin 1862, sehr instruktiv behandelt hat. Einen Gesamtüberblick über die einschlägige Literatur gewinnt man bei S. Günther, Handbuch der mathematischen Geographie, II. Aufl., Stuttgart 1890, § 320 ff. Die Probleme der sphärischen Trigonometrie verwandeln sich auf dem Rotationsellipsoid in solche der sphäroidischen Dreiecksmessung. Einen sehr ausführlichen Lehrbegriff dieses Gegenstandes der höheren Geodäsie liefert J. A. Grunert in seinem trefflichen Buche: Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie, Leipzig 1837, § 241–314. Noch erschöpfender diskutiert alle hierher einschlägigen Fragen: F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Leipzig 1880—84, I. Bd.

Beim Segeln unter konstantem Kurswinkel, das früher allgemein üblich war, beschreibt das Schiff eine Art sphärischer Spirale, die sich dem Pol asymptotisch nähert. Man nennt sie bekanntlich Loxodrome oder Rhumblinie. Ihre mathematische

Behandlung hat zu einer besonderen Art von Trigonometrie, der sog. loxodromischen Trigonometrie, geführt. Man vergleiche hierzu: Grunert, Loxodromische Trigonometrie, Leipzig 1837, wo auch auf die Elliptizität der Erde Rücksicht genommen ist. Für die Geschichte dieser merkwürdigen Kurve bietet reichste Belehrung: S. Günther, Geschichte der loxodromischen Kurven, Halle a. S. 1879.

Isohypsen sind in der Geodäsie Linien gleicher Höhe einer terrestrischen Erhebung. Diese Kurven zerfällen letztere also in Schichten, daher sie auch Schichtlinien oder Niveaulinien heißen. Der daneben noch vorkommende Ausdruck „Höhenkurven" ist jedoch nicht eindeutig. Er wird in der nautischen Astronomie ebenfalls gebraucht und bezeichnet dort den geometrischen Ort aller Punkte, von denen zur selben Zeit ein Stern unter demselben Höhenwinkel gesehen wird. Vgl.: Y. von Villerceau, Nouvelle Navigation astronomique, Paris 1887.

Äquideformaten sind auf Karten ohne nähere Bezeichnung die „Linien gleicher Winkelverzerrung"; daneben auch als „Linien gleicher Längenfehler" oder „Linien gleicher Linearveränderung oder Linearverzerrung" gebräuchlich[1].

Instrumente und Verfahren zum Messen der Länge von Linien.

Allgemeines.

Es ist zu unterscheiden zwischen Hilfsmitteln, bei denen die gemessene Länge durch Vergleich mit den Angaben eines Maßstabes festgestellt wird, und solchen, bei denen dies durch entsprechende Konstruktion des Instrumentes direkt geschieht. Zu den ersteren gehört a) der Faden, der beim Messen von gebrochenen und vielfach gekrümmten Linien zweckmäßig in feuchtem Zustande angewendet wird, damit er sich den Krümmungen anschmiegen läßt. Beim Vergleich mit dem Maß-

[1] Behrmann, S. 7.

stab ist die Vorsicht zu gebrauchen, daß der Feuchtigkeitsgrad möglichst wenig verändert wird, damit nicht durch Ausdehnung und Zusammenziehung Fehler entstehen. Man kann den Faden auch durch dünnen Draht aus weichem Metall[1] ersetzen. b) Der Zirkel[2], strenggenommen nur für gerade Strecken verwendbar. Es können daher mit dem Zirkel bei gekrümmten Linien nur kurze Teilstrecken gemessen werden.

Besonderes Verfahren beim Gebrauch des Zirkels zum Messen vielfach gekrümmter Linien.

Es sei dem Verfasser gestattet, aus seiner Praxis auf ein Verfahren aufmerksam zu machen, das in der Literatur noch nicht erwähnt ist, das aber gegenüber dem Messen mit kleiner Zirkelweite (Addition) den Vorteil hat, daß sich der individuelle Fehler auf eine größere Strecke verteilt und dadurch prozentual vermindert: Man greife eine bestimmte Länge, z. B. 100 mm ab, die in der Natur, um bequemes Rechnen zu ermöglichen, tunlichst einer dekadischen Anzahl von Kilometern entspricht. Nun setze man die eine Zirkelspitze an den Anfangspunkt des als gerade anzusehenden Stückchens der zu messenden vielfach gekrümmten Linie, die zweite in die Verlängerung des ersten als gerade zu betrachtenden Stückchens, dann rücke man mit der Zirkelspitze vom Anfangspunkt bis zum ersten Krümmungspunkt vor unter entsprechender Verkleinerung der Zirkelweite. Nun wird die zweite Spitze wieder in der Verlängerung des zweiten als gerade zu betrachtenden Stückchens gestellt und die andere Spitze wieder bis zum (zweiten) Krümmungspunkt vorgerückt usf. Dieses Verfahren ist gewissermaßen eine Subtraktion, denn es wird so lange geübt, bis die angenommene Öffnung (1 dcm) 0 geworden ist. Es läßt sich dann sagen, daß der zurückgelegte Weg gleich der in den Zirkel genommenen Länge ist. Sollte noch ein Rest übrigbleiben, d. h. ist die zu messende Linie kürzer als die (letzte) Zirkelweite, so ist selbstverständlich dieser Rest von der angenommenen Länge abzuziehen, und die Differenz wird die wahre Länge angeben. Die Genauigkeit dieses

[1] C. Leicher, Orometrie des Harzgebirges. Halle a. S. 1886. S. 4, Anmerkung.

[2] Näheres siehe Zöppritz-Bludau II 87.

Verfahrens ist recht erheblich und vor allem ohne künstliche Hilfsmittel erreichbar. Es kommt als Fehlerquelle nur in Betracht, daß man sich den Kurven nicht allzu genau anschmiegen kann. Der Fehler beträgt immerhin nur bis 2%, wenn die Kurven nicht besonders kompliziert sind. Man muß stets einen größeren Betrag als die wahre Länge bekommen, da die Summe der an die Kurven gelegten Tangenten größer ist als sie selbst.

Instrumente, mit denen eine direkte Messung von Linien aller Art vorgenommen werden kann, werden

Kurvimeter,

auch Kartometer genannt.

Man unterscheidet Kurvimeter mit einem Rädchen, dann kurzweg „Meßrädchen" genannt und solche mit zwei bis drei Rädchen. Nur diese können auf die Bezeichnung von Präzisionsinstrumenten Anspruch machen. Die ersteren beruhen auf dem Gedanken, mittels der Umdrehungen eines an der zu messenden Linie entlang laufenden Rädchens ihre Länge zu messen. Bei den Kurvimetern mit mehreren Rädern fährt nicht das Meßrädchen, sondern ein Fahrstift oder ein Indikator an der zu messenden Linie entlang. Durch seine Bewegung werden Räder in Bewegung gesetzt, deren Umläufe der vom Stift zurückgelegten Strecke entsprechen und an Registriervorrichtungen abgelesen werden, derartig, daß sich die erstere aus der algebraischen Summe der Räderumdrehungen ergibt.

Kritische Beschreibungen von Kurvimetern mit Quellenangaben befinden sich bereits bei Carl E. M. Rohrbach, Zur mathematischen Behandlung geographischer Probleme[1]. Das darin erwähnte zweirädrige Instrument von G. Coradi in Zürich[2] hat große Ähnlichkeit mit dem gleichzeitig, aber unabhängig davon, vom Professor Dr. W. Ule entworfenen Zentralkurvimeter[3], das am 5. September 1894 zum Patent angemeldet und am 21. Januar 1895 unter D R. P. 79948 patentiert wurde.

[1] In der Festschrift für v. Richthofen, Berlin 1893.

[2] S. auch Katalog dieser Firma von 1910, Ziff. 44; vgl. ferner Fiorinis im Literaturverzeichnis genannte Sonderschrift von 1886, S. 17.

[3] Hammer, Über die Rektifizierapparate von Dr. W. Ule, s. Zeitschrift für Instrumentenkunde. Berlin 1895. Jahrgang 15, S. 278. S. außerdem: Der Mechaniker. Berlin 1895. Nr. 3, S. 27, Nr. 4, S. 40.

Dieses Zentralkurvimeter und das demselben Erfinder gleichzeitig patentierte Polarkurvimeter, Konstruktionen, die zusammen mit dem Namen Parallelkurvimeter bezeichnet wurden, finden sich beschrieben und abgebildet in einem von M. Wesselhöft in Halle a. d. S. herausgegebenen, später von der Mechanischen Werkstatt Beck & Gläser, ebendaselbst, übernommenen Prospekt[1].

Die Uleschen Instrumente sind sehr sinnreich konstruiert. Ule selbst führt in seinem Grundriß der allgemeinen Erdkunde, Leipzig 1900, S. 37 den Fehler des Polarkurvimeters nach Haack[2] mit „0,1 %“ an. Wie durch Rückfrage beim Verfasser festgestellt wurde, ist damit der mittlere Fehler gemeint und ist die Zahl noch durch die Vorzeichen ± zu ergänzen, die beim Korrekturlesen versehentlich weggelassen wurden. Näheres über die Methode zur Ermittlung der Fehler enthält der genannte Prospekt. Auch Zöppritz-Bludau beschäftigt sich im zweiten Teil seines Leitfadens der Kartenentwurfslehre, Leipzig 1908, S. 88 ff. kritisch mit mehrrädrigen Kurvimetern und ihren Fehlern, indem er gleichzeitig auf die Berichte von Hammer und Haack im „Geographischen Jahrbuch“ verweist. Ein Kurvimeter mit drei Rädern findet sich bei Zöppritz-Bludau an der genannten Stelle abgebildet und beschrieben. Es ist Fleischhauers Kartometer, das bis 1906 von der Mechanischen Werkstätte Ludwig Tesdorpf in Stuttgart hergestellt wurde, die dann auf Florenz Sartorius in Göttingen übergegangen ist.

Der Vollständigkeit halber seien außer den genannten noch einige Fabrikanten von Meßrädchen und Kurvimetern sowie neuere Patente, solche Instrumente betreffend, hier angeführt:

G. Bormann Nachfolger, Berlin C, und Clemens Riefler, Nesselwang und München, beide für Meßrädchen mit Zifferblatt oder Zählwerk, Konstruktionen, die viel in der Armee gebraucht werden.

J. Amsler-Laffon & Sohn, Schaffhausen, Schweiz, Präzisionskurvimeter, Photographie N. 450, Zeichnung 3047/381. Meßlänge nur 60 mm.

[1] Hammer, a. a. O.

[2] Petermanns Mitteilungen 1895, S. 220

D. R. P. 99793, 11. Februar 1898 / 19. Oktober 1898, Bonnefoi & Cie., Paris, Kurvimeter mit umstellbarem Räderwerk, entsprechend dem Maßstab der Karten.

D. R. P. 157240, 21. August 1903 / 19. Dezember 1904, Sophus Hartmann und Hermann Fulde. Ringmeßrädchen. Für geographische Zwecke wenig geeignet.

D. R. P. 176098, 14. Juli 1905 / 11. Oktober 1906, Hermann Grotta in Berlin, Ausrückvorrichtung, um Meßrädchen und Zählwerk gleichzeitig auf Null zu stellen.

D. R. P. 199620, 24. März 1907 / 20. Juni 1908, Adolf Friedrich Gerdes in Berlin. Meßrad mit großem Umfang. Für geographische Zwecke wenig geeignet.

Allgemein sagt Rohrbach (zur mathematischen Behandlung geographischer Probleme): „Die besten instrumentalen Hilfsmittel zur Längenmessung können nur ein geringes Maß von Zuverlässigkeit verbürgen, wenn es sich um komplizierte Kurven handelt. Man muß zufrieden sein, wenn der zufällige Fehler hier 2% nicht übersteigt, jedenfalls reicht keine mechanische Rektifikationsmethode auch nur entfernt an die Genauigkeit heran, die bei der mechanischen Quadratur erreicht wird.“ — Das war 1893 und gilt nach dem weiter oben Gesagten jetzt nur bedingt.

Dessenungeachtet wird das Verhältnis zwischen mechanischer Linearmessung und mechanischer Quadratur immer dasselbe bleiben, indem, wie Rohrbach bei den Vorzügen der Planimetermessung hervorhebt, „die durch seitliche Abweichungen bedingten Fehler sich größtenteils aufheben“. Einen Faktor berücksichtigt Rohrbach allerdings nicht: die Verschiedenartigkeit der Oberfläche der Karten. Bei rauhem Papier, das namentlich zum Zeichnen verwendet wird, wird man nämlich stets zu große Resultate bekommen. Da sich nun dieser Fehler beim Planimeter quadriert, so gewinnt in dieser Beziehung das Kurvimeter wieder einen kleinen Vorsprung. Überdies wird auch bei dem Kurvimeter + und — eintreten.

Eingeführte Meßverfahren.

Wie vom Verfasser durch Rückfragen an zuständigen amtlichen Stellen festgestellt wurde, hat sich in den topographischen und statistischen Bureaus eine Methodik für die Ermittlung von Linearmaßen auf Karten weder hinsichtlich der zu verwendenden Instrumente noch nach der Seite der dafür zugrunde zu legenden Karten entwickelt. Allgemein scheint das einrädrige Kurvimeter, also das gewöhnliche Meßrädchen, als genügend genau angesehen und angewandt zu werden. Sämtliche befragte Stellen bemerken, daß Aufgaben mit Linienmessungen nur selten an sie herantreten.

In Preußen arbeitet man gewöhnlich mit der Karte 1:100000, „wenn erforderlich", auch mit den Meßtischblättern 1:25000.

In Bayern benutzt man in den seltenen Fällen, wo es sich um genaue Linienmessungen handelt, Karten der größten Maßstäbe, sog. Steuerblätter 1:5000.

Das Eidgenössische Topographische Bureau in Bern verwendet, ohne eine bestimmte Konstruktion vorzuschreiben, Kurvimeter, deren Zuverlässigkeit genau geprüft wird, „mit möglichst kleinen Laufrädchen" und benutzt die Karte 1:25000.

In Dänemark wird die Karte 1:40000 zugrunde gelegt.

In Norwegen werden zur Ermittlung der Länge der Küstenlinie „die jeweiligen besten Karten" benutzt, früher 1:250000 und 1:100000, neuerdings solche im Maßstabe 1:50000 und für einige Strecken sogar 1:25000. Die Länge der politischen Grenze wurde vor etwa 150 Jahren geodätisch durch Aufnahme von Grenzstein zu Grenzstein ermittelt. Eine Nachprüfung scheint in Aussicht genommen zu sein. Man wird dabei mit der Karte 1:50000 operieren.

In Italien, wo diese Arbeiten in der Hand des durch seine exakte Berichterstattung über die Flächenausmessung des Königreichs rühmlich bekannten Militär-Geographischen Instituts liegen, hat sich im Gegensatz zum planimetrischen Meßverfahren noch kein System für kurvimetrische und andere Linienmessungen entwickelt. Die als Grundlage der letzteren dienenden Maße der Meridiane und Breitenparallelen werden nach der

für die Flächenausmessung[1] angewandten Methode ermittelt. Das gleiche gilt hinsichtlich Auswahl der zu benutzenden topographischen Karten.

In Frankreich bestehen beim Service Géographique de l'Armée keine bestimmten Vorschriften. Man bedient sich für Linienmessungen eines einrädrigen Kurvimeters und der Karten im Maßstabe 1:50000, 1:80000, 1:100000, 1:200000. Aus der Projektion, der Reduktion und der Reproduktion sich ergebende Ungenauigkeiten werden unberücksichtigt gelassen.

In Österreich-Ungarn war beim k. und k. militärgeographischen Institut nur die Auskunft zu erlangen, daß Kurvimeter nicht benutzt werden.

Auch in den privaten Instituten hat sich noch keine Methode entwickelt, da Linienmessungen auch da tatsächlich selten vorkommen. So hat z. B. Justus Perthes' Geographische Anstalt nach einer brieflichen Mitteilung seit Jahren derartige Messungen nicht mehr ausgeführt. Bei früheren Arbeiten wurde dazu das Kurvimeter von Fleischhauer benutzt (s. S. 7). Professor Dr. Haack benutzt bei seinen eigenen Arbeiten ausschließlich die Uleschen Kurvimeter, begnügt sich aber auch hin und wieder mit der Auszirkelung.

Einfluß des Maßstabes und des Gradnetzentwurfes.

Messungen auf dem Globus.

Geht man vom Globus als der dreidimensionalen Wiedergabe des Erdsphäroids aus, so ist ohne weiteres klar, daß sich, da das Globusbild in allen Teilen längen-, flächen- und winkeltreu ist, hier nur von dem Einfluß des Maßstabes auf die Messungen sprechen läßt. Allgemein gilt hier, wie auf Karten, daß die Genauigkeit, mit der die Messung vorgenommen wird, eine Funktion des Maßstabes ist. Dieser Satz bedarf aber insofern einer Einschränkung, als die Genauigkeit bei gleichem

[1] Istituto Geografico Militare, Superficie del Regno d'Italia, Riproduzione corretta dell'Edizione 1885. Firenze 1897. S. 2–16 und 106—108. Vgl. auch Willers, S. 92.

Maßstabe keineswegs für alle zu messenden Längen dieselbe ist. Man kann also nicht unabhängig von der absoluten Länge von einem prozentualen Fehler als Funktion des Maßstabes sprechen. Man muß sich vielmehr bewußt sein, daß die Genauigkeit, also auch der Fehler, das Produkt verschiedener Faktoren ist.

Soweit die Fehlerfaktoren im Kartenbild begründet sind, wie z. B. durch Verkleinerung, Generalisierung, Reproduktion, Zusammenziehung und Ausdehnung des Papiers u. dgl., sind sie direkt vom Maßstabe abhängig. Nicht aber sind es diejenigen Faktoren, die in der Unvollkommenheit der Meßwerkzeuge und der menschlichen Sinne, kleinste Längenunterschiede wahrzunehmen und mit Instrumenten festzustellen, begründet sind. Diese Verschiedenheit der Fehlerquellen hat in der Literatur bisher nicht die genügende Würdigung gefunden. Ist beispielsweise 0,5 mm das kleinste Maß, das sich in Karten auftragen und mit Sicherheit abgreifen läßt, so stellt dieses Maß bei einer ganzen Länge von 50 mm 1 % der absoluten Länge dar, bei 100 mm aber nur 0,5 %. Dasselbe absolute Maß von 0,5 mm, das gleichzeitig den größten Fehler darstellt, würde im Maßstabe:

1:10000	5 m
1:100000	50 „
1:1000000	500 „
1:10000000	5 km

ausmachen.

Dieser sog. „persönliche Fehler“ [1] ergibt beim Umrechnen aus dem Globus oder der Karte in das natürliche Maß Werte, die umgekehrt proportional der Verjüngung, aber von der Länge der zu messenden und umzurechnenden Linien so gut wie unabhängig sind. Die Vernachlässigung dieses persönlichen Fehlers hat darin ihren Grund, daß die in der Karte beruhenden Fehler erheblich größer sind; denn was nützt alle noch so feine Messung, wenn bei der zu messenden Linie infolge Unvollkommenheit

[1] Kartenkunde von E. Gelcich, F. Sauter und P. Dinse, 3. Aufl., revidiert und erweitert von M. Groll. Sammlung Göschen, Leipzig 1910, S. 167. Vgl. über die in Frage kommenden persönlichen Eigenschaften des Messenden: Zöppritz-Bludau, Bd. II, 1908, § 78.

des Materials, Abhängigkeit der Karte von der Reproduktion und äußerlichen Einflüssen die „persönlichen Fehler“ durch andere um ein vielfaches übertroffen werden. In dieser Beziehung hat der Globus das vor der Karte voraus, daß er aus solchen Stoffen hergestellt werden kann, daß die — sagen wir passiven — Fehler geringer sind, indem die äußeren Einflüsse sich weniger bemerkbar machen; andererseits wird der Globus nur in kleinem Maßstabe — also in starken Verjüngungen ausgeführt, indem eine Steigerung des Maßstabes sowohl in der Schwierigkeit einer genauen Herstellung wie auch in der durch die unförmige Größe bedingten beschränkten Brauchbarkeit bald ihre Grenzen findet. Ein Globus im Maßstabe 1:10000000 würde bereits einen Umfang von 4 m, also einen Durchmesser von 1,273 m haben. Die größten Globen für wissenschaftliche Zwecke überschreiten im allgemeinen nicht 80 cm Durchmesser. (Vgl. Katalog der Firma Dietrich Reimer [Ernst Vohsen], Berlin, vom November 1910.) Adolf Henze's Verlag in Leipzig-Neustadt fertigte zu Handelszwecken einen Globus von 110 cm Durchmesser.

Längenmessungen von eingezeichneten Linien können auf dem Globus ohne weiteres vorgenommen werden, vorbehaltlich der Prüfung des Maßstabes, von der bei Messungen auf Karten noch die Rede sein wird, und vorbehaltlich der Ausschaltung der Fehler, die der Globuskonstruktion und den Meßinstrumenten anhaften.

Korrektionsfaktor beim Globus.

Um zu vermeiden, daß auf dem Globus beim Messen eingezeichneter Linien die Sehne statt dem Bogen genommen wird, wird man bestrebt sein, beim Abgreifen mit dem Zirkel möglichst kleine Teilmaße zu nehmen, bei längeren Linien aber das Kurvimeter anwenden. Es ist hierbei indes ein Korrektionsfaktor zu berücksichtigen, sobald man von zweirädrigen Kurvimetern Gebrauch macht. Auch hier wird es wesentlich auf den Maßstab des Globus ankommen, ob und welche Rolle dieser Fehler spielt.

Ist r der Radius des Globus,
h der halbe Abstand der Rädchen,
B der Berührungspunkt eines Rädchens,
A der Berührungspunkt des Fahrstiftes,

also das Profil der zu messenden Linie, so mißt das Kurvimeter Linien mit dem Krümmungsradius OB_1 statt OA (s. Fig. 1).

$$OB_1 = z \text{ gesucht.}$$

$$\text{Es ist } z^2 = OB^2 - BB_1^2 = r^2 - h^2$$

$$z = \sqrt{r^2 - h^2}.$$

Mithin ist das Ergebnis der Kurvimetermessung zu multiplizieren mit

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}},$$

wobei der Quotient immer > 1 ist.

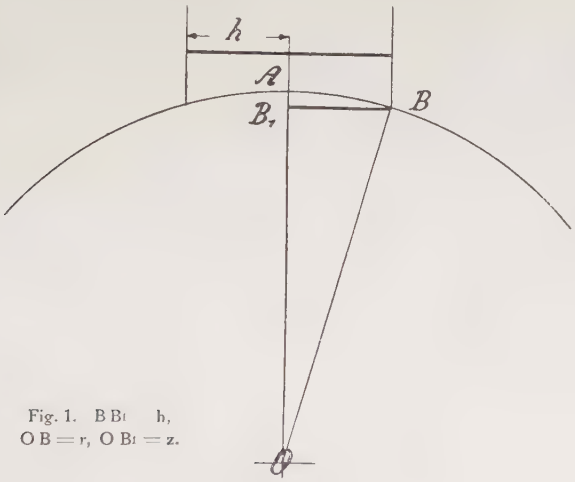


Fig. 1. $BB_1 = h$, $OB = r$, $OB_1 = z$.

Beispiel:

Globus 1 : 40 000 000

r = 159,3 mm

h = 20 „

z = 158,05 „

Korrektionsfaktor $\frac{159{,}3}{158{,}05}$ mm = 1,008.

Bei einem Globus von 1 : 20 000 000 würde er nur noch 1,003 betragen.

Bietet somit das Messen eingezeichneter Linien auf dem Globus keine Schwierigkeit, so treten solche wohl beim Messen

nicht eingezeichneter, z. B. der Orthodromen und Loxodromen, ein. Für erstere kann, wenn man sich nicht des rohen Hilfsmittels des angelegten Fadens bedienen will, allenfalls ein mit dem Radius des Globus gebogenes Lineal (sog. Höhenquadrant)[1], das mit einem Entfernungsarkus auf der konkaven Seite versehen ist, benutzt werden; doch hält es schwer, diesen Maßstab genau im Großkreis anzulegen, wenn dieser nur durch die beiden Endpunkte einer Linie gegeben ist[2]. Bei einer Orthodrome mit dem Zentriwinkel 60^0 würde der Arkus 6670 km betragen. Legt man die Kurve um x^0 falsch an, so ist der größte Fehler $1 - \cos x$, bei $x = 5^0$ ist $\cos x = 0{,}9962$, mithin größter Fehler $= 1 - 0{,}9962 = 0{,}0038 = 0{,}38\,^0/_0 = 25$ km. Ist das Messen der Orthodromen somit immerhin leidlich durchführbar, so versagt der Globus doch für das Messen der Loxodromen, da man sie erst einzeichnen und deshalb vorher berechnen müßte. Letzteres will man aber beim „Messen" vermeiden. Man muß daher seine

[1] Vgl. die von Dietrich Reimer (Ernst Vohsen), Berlin, herausgegebene „Anleitung zum Gebrauch der Adami-Kiepertschen Erdgloben", Aufgabe 10. — Eine große Anzahl von Fragen mathematischer Erdkunde lassen sich leicht mittels des Globus lösen, z. B. am Erdglobus: Aufsuchen der Gegenbewohner, Nebenbewohner; Beweis des Satzes von der Gleichheit der Polhöhe und geographischen Breite; Bestimmung des Zeitunterschiedes zweier Erdorte. Sowohl der Erd- als Himmelsglobus erlauben ferner die Ermittlung der Dauer der täglichen Beleuchtung, der Dämmerung usw. Zur bequemen Auflösung solcher Aufgaben der sphärischen Astronomie dient vorzüglich der bei D. Reimer erschienene Transformator für sphärische Koordinaten.

An diesbezüglichen Schriften didaktischen Inhalts sind zu nennen:

Wollweber, Globuskunde. Freiburg-Br. 1875.

Adam, Globus; Anwendung des Globus in der astronomischen Geographie nebst einigen Zusätzen. Wien 1887.

Krumme, Über den Unterricht in der astronomischen Geographie in den unteren und mittleren Klassen höherer Schulen. Pädagogisches Archiv XXIV 511 ff.

Göpfert, Methodische Bemerkungen zum Gebrauche eines wertvollen Lehrmittels. Rostock-Prag 1883.

Diesterweg, Populäre Himmelskunde und astronomische Geographie. Berlin 1868.

[2] Eine elegante Lösung des Problems des beweglichen Höhenquadranten bietet das D. R. P. Nr. 6814, Klasse 42 vom Jahre 1879 von F. W. Eichens nebst Ergänzung 9257 derselben Klasse 1879.

Zuflucht zur Karte nehmen[1]. — So paradox dies klingt, ist hier also das Gebiet, wo tatsächlich die Karte bessere Dienste leistet und anschaulicher wirkt als der Globus, und dies führt zur eigentlichen Aufgabe der Kartometrie.

Messungen auf der Karte.

Der Einfluß des Maßstabes.

Beim Übergang vom Globusbild auf das Kartenbild kommt neben dem Maßstab als neues Moment der Gradnetzentwurf in Betracht. Innerhalb jeder Projektionsart bleibt bei Darstellung einer Fläche von bestimmter Größe der Einfluß des

[1] Die Länge eines Loxodromenbogens zwischen zwei gegebenen geographischen Breiten zu ermitteln, falls man noch den konstanten Kurswinkel kennt, d. h. die Rektifikation durchzuführen, ist ohne Integralrechnung immerhin so einfach, daß in der Praxis die rechnerische Bestimmung der graphischen (Mercatorkarte) im allgemeinen vorgezogen wird.

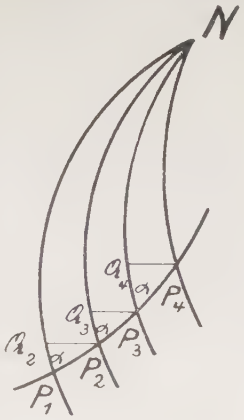


Fig. 2.

Um z. B. die Länge der Kurven zwischen den Punkten P_1 und P_4, deren Breiten bzw. φ_1 und φ_4 sein sollen, zu finden (vgl. Fig. 2), denke man sich vom Pole N eine große Zahl Meridiane gezogen, welche die Loxodrome in sehr kleine Teile zerschneiden, die wir als geradlinig auffassen können. Zunächst projizieren wir jedes Kurventeilchen auf den vorhergehenden Meridian, so daß die Projektion von $P_1 P_2 = P_1 Q_2$, von $P_2 P_3 = P_2 Q_3$ ist usw. Nun hat man in den als eben zu betrachtenden rechtwinkligen Elementardreiecken:

$$\frac{P_1 Q_2}{P_1 P_2} = \cos \alpha$$

$$\frac{P_2 Q_3}{P_2 P_3} = \cos \alpha \text{ usw.}$$

Daraus folgt: $P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_4 = \frac{1}{\cos \alpha} [P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + P_3 Q_4]$.

Die Summe der eckigen Klammer übertragen wir auf den ersten Meridian und erkennen dann sofort, daß sie gleich dem Breitenunterschied der zwei äußersten Punkte P_1 und P_4, also $= \varphi_4 - \varphi_1$ ist. Damit hat man: $P_1 P_4 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{\cos \alpha}$ und demnach für ein beliebiges Loxodromenstück allgemein: $s = \frac{\varphi_n - \varphi_1}{\cos \alpha}$.

Maßstabes stets derselbe. Es gilt also das beim Globus über den Einfluß des Maßstabes Gesagte nur innerhalb jeder Projektionsart, wobei zu berücksichtigen ist, daß das auf der Karte angegebene Verjüngungsverhältnis stets von dem zur Berechnung des Gradnetzes angenommenen Erdradius ausgeht. Die Verjüngung einer beliebigen Oberflächenlinie ist aber proportional derjenigen des Erdradius, wenn man die Erde als mathematische Kugel annimmt. Dies soll im nachstehenden geschehen.

Gibt es auch Karten, auf denen lediglich der Einfluß des Maßstabes, nicht aber der der Projektion sich geltend macht? Rein theoretisch gesprochen ist die Frage zu verneinen, da die Kugeloberfläche sich nicht in die Ebene abwickeln läßt. In der Praxis, d. h. in Berücksichtigung der Fehler, die den Karten durch äußere Einflüsse anhaften, ist die Frage bedingt zu bejahen, bedingt insofern, als die Antwort abhängt von der absoluten Größe der auf der Karte wiedergegebenen Globusfläche und von dem anzuwendenden Maßstabe. Je größer der Maßstab und je kleiner der Globusausschnitt, um so mehr nähert sich dieser in allen Teilen dem Bilde auf dem Globus. Die Rücksicht auf den Maßstab allein genügt zur Beurteilung nicht, da ja die Karten unabhängig vom Maßstab die verschiedensten absoluten Größen haben können und auch tatsächlich haben. So enthält beispielsweise die Karte des Deutschen Reiches 1 : 100000 in einem Felde von 1° Breite und 2° Länge 16 Blätter, während die in derselben Projektionsart gleichfalls als Gradabteilungskarte ausgeführte Übersichtskarte von Mitteleuropa 1 : 300000 den Flächeninhalt der beiden Gradfelder in einem Blatt vereinigt. Bei gleicher Blattgröße müßte also das Doppelgradfeld $16 : 3^2 = 16 : 9 = 1{,}78$ Blätter umfassen oder umgekehrt unter Beibehalt der Größe der Karte 1 : 300000 müßte die Karte 1 : 100000 $3^2 = 9$ Blätter (statt 16) für das Doppelgradfeld enthalten. Für die Beurteilung der Genauigkeit ist dies nach dem eben Gesagten von Wichtigkeit.

Übereinstimmung von Kartenbild und Globusausschnitt.

In der Praxis kann das Kartenbild gleich dem Globusausschnitt sein, nämlich dann, wenn der größte Fehler, der auf

der betreffenden Projektion gemacht wird, nicht größer ist als die Fehler, die in der Herstellung der Karte, der Veränderlichkeit des Papiers und der Individualität des Messenden beruhen. Um festzustellen, ob, wann und inwieweit in Berücksichtigung dieser Fehler ein Einfluß des angewandten Gradnetzentwurfes praktisch hervortritt, also ob die Längen-, Flächen- und Winkelverzerrungen so gering sind, daß sie vernachlässigt werden können, muß man die größten Strecken des darzustellenden Gebietes auf dem Globus mit denen auf der Karte in den verschiedenen geeigneten Projektionen vergleichen. Professor Penck verfährt dabei wie folgt[1]: Bezeichnet man eine solche größte Strecke auf dem Globus mit Arkus, das Verjüngungsverhältnis der Karte mit $\frac{1}{v}$ und mit f das jeweilige Halbmessergesetz der Azimutal- oder Kegelprojektion, nach dem man diese Strecke vom Punkte der geringsten Verzerrung oder verzerrungslosen Punkt, Indifferenzpunkt (Kartenmittelpunkt) aus auftragen muß, um Flächentreue, Winkeltreue oder Mittabstandstreue zu erreichen, so ist die flächentreue Projektion praktisch gleich der winkeltreuen, gleich der mittabstandstreuen und gleich dem Globusausschnitt, sobald

$$\text{arc} \cdot \frac{1}{v} - f \cdot \frac{1}{v}$$

kleiner als die Summe der persönlichen Fehler und die der Kartenreproduktion ist.

Bei den danach ausgeführten Untersuchungen, auf die bei Besprechung des Einflusses des Gradnetzentwurfes noch zurückzukommen sein wird, gelangt man zu dem Resultat, daß Karten, deren Verjüngung nicht mehr als etwa 1:200000 beträgt, also alle topographischen Karten, bei der üblichen Kartengröße vom Gradnetzentwurf so gut wie unabhängig sind, daß ferner bei richtig gewählter Projektionsart auch Übersichtskarten unter Umständen noch als Ausschnitte aus dem Globus betrachtet werden können. Das Charakteristische des Globus wie jedes Ausschnittes aus ihm ist, daß in allen Teilen im Vergleich mit der Natur Längen-, Flächen- und Winkeltreue gewahrt wird. Soweit

[1] S. die im Literaturverzeichnis und S. 11 genannte Kartenkunde, 1910, S. 169.

dies aber der Fall ist, kann nur von dem Einfluß des Maßstabes die Rede sein. Bei derartigen Karten können also Längenmessungen von Linien, seien es nun gerade, gebogene oder mehrfach gekrümmte ohne weiteres ausgeführt werden, vorausgesetzt, daß man über die nötigen hinreichend genauen Instrumente verfügt.

Der Nenner des Maßstabes soll für die Kartometrie angeben, mit welchem Wert die auf der Karte gemessene Länge multipliziert werden muß, um gleich der in der Natur zu werden.

Ungenauigkeit der Verjüngungsverhältnisse und ihre Prüfung.

Es ist eine einmal in einem bestimmten Maßstabe gezeichnete Karte Veränderungen unterworfen, denn das Papier, auf dem die Karten hergestellt werden, hat die Eigenschaft, sich durch Einwirkung von Feuchtigkeit und Temperatur auszudehnen und zusammenzuziehen[1]. Schon beim Druck treten diese Veränderungen ein, indem dem Papier Feuchtigkeit zugeführt wird, was in erhöhtem Maße für die farbige Reproduktion gilt. Unter den Druckpressen wird es meist in einer Richtung gedehnt. Beim Trocknen findet wieder eine verschiedenartige Zusammenziehung statt. Auch nach dem Druck ist die Veränderung des Papiers abhängig von Witterung und Jahreszeit, ja selbst von der Tageszeit. Will man zunächst den tatsächlichen Maßstab für die Stunde der Messung feststellen, so ist dies, wenn das Verjüngungsverhältnis angegeben ist, sehr einfach. Ob dabei gleichzeitig ein eingezeichneter Maßstab vorhanden ist oder nicht, ist nebensächlich, da der Maßstab seinerseits erst auf Richtigkeit geprüft werden muß. Das wirkliche Verjüngungsverhältnis des gezeichneten Maßstabes errechnet sich so, daß man sein absolutes Maß in die Länge, welche dieses Maß darstellen soll, dividiert. Zur Bestimmung des wirklichen Verjüngungsverhältnisses der Karte ist es nötig, daß sie entweder mit Gradlinien versehen ist, von denen mindestens eine

[1] Ausführlich bei Willers, S. 50—52. S. auch H. Wagner, Lehrbuch 1908, S. 195; ferner G. Schweizer in Bulletins Académiques. Imp. des sciences de St-Pétersbourg. Cl. phys.-math. IV, 389—395 (1859).

längentreu sein muß, oder bei Gradabteilungskarten eine entsprechende Einteilung der Ränder in Grade und Minuten vorhanden ist, oder schließlich, daß trigonometrische Punkte eingetragen sind, deren geodätische Entfernungen aus dem Triangulationsnetz zu entnehmen sind. In den ersten beiden Fällen läßt sich aus den Abmessungen des Erdsphäroids die wirkliche Länge und Breite der dargestellten Fläche ableiten, wobei man zwei Verjüngungsverhältnisse erhält, eins für den östlichen und westlichen Kartenrand (Breitenzone) und eins für den nördlichen und südlichen Rand (Längengrade). Das jeweilige Verjüngungsverhältnis ist dann gleich wirklicher Bogenlänge des Erdsphäroids, dividiert durch Länge der betreffenden längentreuen Seite des Kartengradvierecks oder des längentreuen Kartenrandes.

Wer viel mit kartographischen und kartometrischen Arbeiten zu tun hat, bedient sich zweckmäßig fester Maßstäbe, und zwar transversaler Maßstäbe aus Metall, Holz oder dergleichen unter Ignorierung der gezeichneten. Die mit solchem Maßstabe gemessenen Längen müssen dann mit dem Korrektionsfaktor multipliziert werden, der sich aus der vorgenommenen Ermittlung des wirklichen Verjüngungsverhältnisses des Kartenbildes ergeben hat. In der Regel wird die Verjüngung auf der Karte stärker sein, als das Verjüngungsverhältnis angibt. Man wird also bei einem an sich richtigen Maßstabe auf der Karte meistens zu kurz messen. Der Korrektionsfaktor wird daher in der Regel > 1 sein. Er läßt sich darstellen durch den Bruch:

$$\frac{\text{Nenner des wirklichen Verjüngungsverhältnisses}}{\text{Nenner des angegebenen Verjüngungsverhältnisses}}$$

Verfasser hat zahlreiche Nachprüfungen von Meßtischblättern 1:25000, von Blättern der Karte des Deutschen Reiches 1:100000 und von solchen der topographischen Übersichtskarte des Deutschen Reiches 1:200000, sämtlich im Gebiet der Lüneburger Heide, vorgenommen. Es ergaben sich dabei die in umstehender Tabelle angegebenen mittleren, wirklichen Verjüngungsverhältnisse.

Weitere Zahlen über Reproduktionsungenauigkeiten finden sich in der mehrfach genannten Kartenkunde, S. 167 168.

Es darf nicht verschwiegen werden, daß die Abweichungen des wirklichen Maßstabes des Kartenbildes vom angegebenen

Lfd. Nr.	Art der Karte	Angegebenes Verjüngungsverhältnis	Wirkliches Verjüngungsverhältnis des gezeichn. Maßstabes	Wirkliches Verjüngungsverhältnis des Kartenbildes	Therm. Hygrom.
1	Meßtischblatt	1 : 25 000[1]	1 : 25 160	1 : 25 150	18° 60%
2	Karte des Deutschen Reiches, Ausg. B.	1 : 100 000	1 : 100 880	1 : 101 130	
3	Topographische Übersichtskarte des Deutschen Reiches	1 : 200 000	1 : 201 050	1 : 202 170	

manchmal nur minimal sind. So hat Verfasser beispielsweise in Andrees Handatlas Bl. 35/36, Mitteleuropa, Physische Übersicht, 1 : 3 500 000, im Dezember 1909 in flächentreuer Azimutalprojektion (Hauptpunkt 50° n. Br., 12° ö. L.) entworfen, vergleichende Messungen durchgeführt, aus denen sich eine fast völlige Übereinstimmung des angegebenen mit dem wirklichen Verjüngungsverhältnis ergab, nach welcher Methode auch immer diese Messungen ausgeführt wurden. Durch einen merkwürdigen Zufall sind dabei die geringen Linearabweichungen Ost-West einerseits und Nord-Süd andererseits derartig, daß der wirkliche Flächenmaßstab genau dem Quadrat des angegebenen Linearmaßstabes entspricht. Auch in den neuesten Auflagen von Sydow-Wagners Schulatlas finden sich solche Blätter.

Zur Vermeidung der Ermittlung von zweierlei Längenmaßstäben (Nord-Süd und Ost-West), die, wie gesagt, bei der Verschiedenheit der Papierausdehnung in den beiden Richtungen erforderlich wären, kann man bei topographischen Karten auch von der Flächenverjüngung[2] ausgehen. Dieser an sich natürlich unerwünschte Umweg über die Fläche ist nötig, wenn man (es ist nur von topographischen, d. h. von praktisch zugleich flächen-,

[1] Bei dieser Verjüngung tritt der Fehler der Reproduktion sogar so in die Erscheinung, daß der polwärts gelegene Kartenrand bisweilen breiter ist als der äquatorwärts gelegene.

[2] W. Behrmann behandelt in anderem Zusammenhang für flächentreue geographische Karten die Beziehungen zwischen Flächen- und Längenmaßstab in seiner Schrift: Zur Kritik der flächentreuen Projektionen der ganzen Erde und einer Halbkugel. München 1909. S. 39.

längen- und winkeltreuen Karten die Rede) überhaupt aus der Karte den wirklichen Längenmaßstab ermitteln will. Das ist aber für viele Aufgaben unvermeidbar.

Nach diesem Verfahren erhält man wirkliche Längenverjüngung

$$= 1 \Big/ \frac{\text{Kartenbildfläche}}{\text{Fläche des Erdsphäroids}}.$$

Die vom Verfasser vorgenommenen Kartenprüfungen konnten nach diesem Verfahren erfolgen. Es wurde das arithmetische Mittel der Länge der beiden Seitenränder mit demjenigen der Länge des oberen und unteren Randes des Kartenbildes in Millimetern gemessen, multipliziert, dann mit dem wirklichen Flächeninhalt des entsprechenden Gradfeldes des Erdsphäroids verglichen und aus dem Ergebnis die Quadratwurzel gezogen.

Nimmt man zur Ermittlung dieses „wirklichen" Maßstabes bei Karten geringer Verjüngung (topographischen) das ganze Kartenbild zum Vergleich mit dem entsprechenden Ausschnitt des Erdsphäroids, so ist dies bei den Karten mit starker Verjüngung, also den eigentlichen geographischen Karten, natürlich nicht angängig. Immerhin ist eine ähnliche Methode der Maßstabbestimmung und damit des Messens von Längen auch bei geographischen Karten anwendbar. Nur muß man bei diesen nicht die Kartenränder, sondern nur die Linien des Gradnetzes als Ausgangsobjekte nehmen, wobei Voraussetzung ist, daß mindestens zwei sich schneidende Gradnetzlinien längentreu sind, was bekanntlich nicht bei allen Projektionen der Fall ist.

Für die Bestimmungen der Maße des Erdsphäroids gibt es bis auf Minuten ausgerechnete Tabellen (Gradtafeln)[1], während die an sich sehr erwünschten direkten Angaben der Karten, wofern sie sich überhaupt vorfinden, nur für geographische und nautische, nicht aber für topographische Zwecke genügen, indem sie sich nicht auf so enge Gradnetzmaschen beziehen, daß da-

[1] Vgl. u. a. Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde, ergänzt durch Reinhertz, Stuttgart 1907; ferner Gauß, F. G., Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst, Halle 1893.

H. Wagner, Lehrbuch 1908, S. 988.

H. Wagners Tafeln auf Minutendekaden erweitert von A. Steinhauser, 1885; s. auch Wagner, Lehrbuch, S. 116, Fußnote.

nach der wirkliche Längenmaßstab (die effektive Verjüngung) für die Topographie kartometrisch genau genug ermittelt werden könnte.

Generalisierung.

Mit zunehmender Verjüngung kommt aber für das Messen der Linien ein schon erwähntes Moment hinzu, das von der Reproduktionsart und dem Gradnetzentwurf fast unabhängig, vorwiegend vom Maßstabe[1] abhängig ist. Gemeint ist die Generalisierung, die eintritt, sobald keine geraden Linien oder weitgeschwungene Kurven in Betracht kommen. Die Generalisierung ist ein Vorgang, der vom Kartographen in gewissen Grenzen nach eigenem Ermessen ausgeübt wird. Es lassen sich keine allgemein gültigen Werte für die durch die zunehmende Generalisierung hervorgerufene Verkürzung angeben. Man kann daher nur empirisch vorgehen. H. Wagner sagt darüber in seinem Lehrbuch 1908, S. 245: „Die an sich gebotene ‚Generalisierung' macht die Karten kleineren Maßstabes zur Messung der Länge der fraglichen Linien so unbrauchbar, daß bei Bestimmung der gleichen Kurven auf verschieden reduzierten Karten leicht Differenzen von 20, 30 und mehr Prozenten herausspringen können[2]. Dies ist die Ursache der großen Unsicherheit, die in unseren Hand- und Lehrbüchern über alle solche Längen, wie besonders Fluß- und Küstenlinien, noch herrscht. In Wahrheit eignen sich nur topographische Karten zu der betreffenden Ausmessung, weil diese alle Krümmungen noch in geometrisch ähnlicher Gestalt abbilden. Geographische Karten geben den Linienverlauf im allgemeinen beträchtlich verkürzt wieder."

In diesem Zusammenhang mag beispielsweise erwähnt werden, daß K. Hassert in seiner Landeskunde und Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien, Leipzig 1907 (Sammlung Göschen Nr. 319), S. 8 die Küstenlänge mit 14240 km oder 19500 km an-

[1] Daneben allerdings in hohem Maße von Art und Zweck der Karte. So wird beispielsweise eine Wandtafel sehr viel mehr generalisiert sein als eine Atlaskarte. Umgekehrt werden z. B. in einer hydrographischen Karte die Flußsysteme weniger generalisiert sein als in anderen Karten usw.

[2] H. Wagner führt selbst auf S. 442 die Ausmessung des Severn an, wobei sich zwischen den Karten 1 : 63360 mit 131,6 km und 1 : 2660000 mit 93,3 km ein Unterschied von 38,3 km = 29,1 % ergab.

gibt „je nach dem Maßstab“, ohne indes letzteren und die Quelle zu nennen. Der Unterschied beträgt also nicht weniger als 5260 km.

In der Anlage 1 sind aus der Literatur weitere Beispiele für die Ungleichheit von geographischen Linienmessungen, und zwar für Flüsse, nebeneinandergestellt. Gewählt wurden der Rhein, der Ganges und der Nil. Sie zeigen, wie unsicher derartige Angaben sind und wie wichtig es ist, dafür stets die Quelle anzugeben. Andererseits darf nicht außer acht gelassen werden, daß die Verschiedenheiten nicht nur auf das kartometrische Konto gesetzt werden dürfen. Besonders gilt dies für den Ganges und in erhöhtem Maße für den Nil, da dessen Erforschung erst jüngeren Datums ist.

In der Tabelle der Anlage 2 sind vergleichsweise einige Resultate von Längenmessungen zusammengefaßt, indem ein und dieselbe mehrfach gekrümmte Linie auf Karten von möglichst verschiedenen Verjüngungen gemessen wurde. Die gefundenen Längen wurden dann mit den geodätischen Messungen (Sollwerten) verglichen. Der Fehler wurde nun im Vergleich zu den gefundenen Längen umgerechnet, so daß die Spalte „Korrektionsfaktor“ angibt, mit welcher Zahl (die immer > 1 ist) die gefundene Länge zu multiplizieren ist, um annähernd die wirkliche Länge zu ergeben[1].

Verfasser ist sich bewußt, einen Fehler begangen zu haben dadurch, daß er diese Messungen auf Karten verschiedener Projektionsart vorgenommen hat. Dieser aber wurde dadurch ausgeglichen, daß die Messung der Längen maschenweise unter Benutzung des ermittelten wirklichen Maschenmaßstabes erfolgte (zu vergleichen S. 21 u. 33, a—d), so daß der Einfluß der Projektionsart, wo von einem solchen noch die Rede sein konnte, ausgeschaltet wurde.

Selbstverständlich können diese empirisch gefundenen Korrektionsfaktoren der Verkürzungen durch Generalisierung nicht

[1] In wissenschaftlichen Werken sollte bei Angabe von geographischen Längenmaßen, von denen noch keine geodätischen Messungen existieren, stets genau vermerkt sein, aus welcher Karte, mit Angabe des Maßstabes und der Projektionsart, sie ermittelt sind. Leider lassen sogar neuere zuverlässige Werke dies vermissen. Vgl. auch H. Wagner a. a. O. S. 808, Anm. 130, wo auf die Verschiedenheit der Angaben der Grenzlänge des Deutschen Reiches aufmerksam gemacht ist.

ohne weiteres auf beliebige Karten und Atlanten übertragen werden, da, wie gesagt, die Generalisierung individuell verschieden gehandhabt wird. Diese „Generalisierung“ ist natürlich streng zu unterscheiden von der „Reduzierung“ mittels Pantograph oder im photographischen Verfahren. Die Generalisierung fängt da an, wo die Reduzierung aufhört, was bereits bei Verkleinerungen von 1 : 3, spätestens aber 1 : 4 der Fall zu sein pflegt. Außer der genannten Tabelle, zu der fast nur geographische Karten im engeren Sinne des Wortes benutzt worden sind, ist noch eine zweite Tabelle aufgestellt worden, welche Messungen der Küstenlinien[1] zweier Inseln enthält, die auf Meßtischblättern, auf Karten 1 : 100000 und auf einer Karte 1 : 500000 ausgeführt sind. Es wurden dazu die Inseln Rügen und Bornholm gewählt, um bei zwei Inseln mit verschiedener Strandentwicklung den Einfluß des Maßstabes auf die Längenmessung festzustellen, und zwar bei Inseln, die in der Ostsee, als einem Mittelmeer liegen, dessen Niveau wegen fast gänzlich fehlender Gezeiten nur geringen Schwankungen unterliegt, so daß Fehler, die in Ebbe und Flut begründet sind, nicht in Betracht kommen. Der Vollständigkeit halber wurde an denselben Objekten vergleichsweise auch der Flächeninhalt ausgemessen, und zwar planimetrisch. Der Maßstab der Meßtischblätter war für Rügen 1 : 25000, für Bornholm 1 : 20000. Die Karte 1 : 100000 ist für Rügen diejenige des Deutschen Reiches Blatt 41, 42, 63, 64, 88, 89, für Bornholm die dänische Generalstabskarte 1 : 100000, aufgenommen im Jahre 1897. Als Karte 1 : 500000 ist für beide Inseln diejenige von Vogel — Karte des Deutschen Reiches Blatt 2 und 3 — benutzt worden. Die deutschen Karten 1 : 25000 und 1 : 100000 sind bekanntlich als Gradabteilungskarten in Polyederprojektion ausgeführt, die dänischen Karten 1 : 20000 und 1 : 100000 in winkeltreuer Kegelprojektion mit dem 56. Grad als längentreuem Kartenmittelparallel. Der Gradnetzentwurf von Vogels Karte dürfte eine

[1] Für das Messen der Längen von Küstenlinien greifen natürlich auch alle die Erwägungen allgemeiner Art Platz, die für die Methodik der Flächenmessungen in Betracht kommen. Vgl. Willers, S. 8 und 23. S. auch den Aufsatz von Dr. H. Blink, „De grenzen van Nederland en in het bijzonder de zeegrenzen“ in der Zeitschrift „Vragen van den Dag“, Heft 4, Amsterdam 1911.

normale mittabstandstreue Kegelprojektion sein, deren Indifferenzpunkt im Schnittpunkt des Breitenparallels 51° 20′ n. Br. mit dem Meridian 31° 30′ östlich von Ferro liegt[1].

Lfd. Nr.	Objekt der Messungen	Meßtischblatt		Karte 1:100 000		Vogels Karte des Deutschen Reiches 1:500 000		Bemerkungen
		Länge der Küstenlinie km	Flächeninhalt qkm	Länge der Küstenlinie km	Flächeninhalt qkm	Länge der Küstenlinie km	Flächeninhalt qkm	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	Rügen . . .	506	968,2[1]	477	967	471	973	[1] Nach dem Kataster
II	Bornholm	150,6	587,1[2]	118,4	580	111,3	583	[2] Angabe der topographischen Abteilung des dänischen Generalstabes

Die Längen wurden mit Coradis und Ules Zentralkurvimetern, die Flächen mit Coradischen Planimetern gemessen unter Berücksichtigung des Instrumentenfehlers und des Maßstabfehlers der Karten. Es wurde das Mittel genommen aus zwei von verschiedenen Personen mit verschiedenen Instrumenten

[1] Nach Ermittlungen des Verfassers im Gegensatz zu Zöppritz-Bludau, der (I 122) angibt, daß Vogels Karte auf der Bonneschen Projektion fuße. Einer Mitteilung des Professors Dr. Langhans zufolge ist die zugrunde gelegte Projektionsart nicht mehr einwandfrei festzustellen, da weder Dr. Vogel noch sein gleichfalls verstorbener Mitarbeiter darüber etwas hinterlassen haben. — Es ist dies — allgemein gesprochen — sehr bedauerlich, da, wie Zöppritz-Bludau (I 99) mit Recht hervorhebt, alle konischen Projektionen einander so ähnlich sehen, daß ohne eine nähere Bezeichnung nur wenige rekognosziert werden können; es sei denn, daß man langwierige genaue Messungen am Netze vornimmt, die aber auch nicht stets zum richtigen Ziele führen.

Bei der Kleinheit der gegenwärtigen Messungsobjekte ist dies übrigens belanglos. Sie wurden gerade mit Rücksicht darauf ausgewählt, daß einwandfrei nur der Einfluß des Maßstabes zur Geltung kommt.

in verschiedenen Richtungen mit verschiedenen Anfangspunkten ausgeführten Messungen. — Während man erwarten sollte, daß bei der stark gegliederten Küste Rügens mit zunehmender Verjüngung eine stärkere Generalisierung eintreten müßte als bei der regelmäßigen Küste Bornholms, ist dies in Wirklichkeit nicht der Fall, ein Beweis für die Güte der deutschen Karten. Des weiteren fällt auf, daß bei beiden Inseln ein Unterschied der Messungen bei 1:100000 und 1:500000 kaum besteht, was auf eine vorzügliche Kartographie und Reproduktion in Vogels Karte des Deutschen Reiches 1:500000 hinweist.

Objekte der geographischen Linienmessung.

Lineare Messungen auf Karten können sich erstrecken auf:

a) in der Natur vorhandene Linien, wie Flußläufe, Tal-, Kamm-, Strandlinien usw.;

b) Linien, die in ihrer ganzen Länge von Menschenhand in der Natur angelegt sind, wie Wege, Eisenbahnen, Kanäle u. dgl. Kunstbauten, oder durch Tracierung festgelegt werden sollen, sowie auf Linien, die durch einzelne mehr oder weniger weit auseinanderliegende Punkte bestimmt sind, wie Grenzen, von der Grundstück- bis zur Provinz- und Landesgrenze, allgemein gesprochen Grenzen von „politischen Räumen“;

c) Linien, die zwar in der Natur als solche nicht vorhanden, wohl aber zur Darstellung der Geländeformen auf Karten eingetragen sein können, wie Isohypsen und Isobathen (orometrische Linien);

d) Linien, die weder in der Natur noch in Karten erkennbar sind, wie die orthodromische, d. h. kürzeste und die loxodromische Verbindungslinie zweier Punkte.

Bei den Fällen a—c handelt es sich um vielfach gekrümmte Linien, wobei mit der proportional dem Verjüngungsverhältnis fortschreitenden Generalisierung kleine Biegungen, Krümmungen, Ecken, Vorsprünge usw. wegfallen und dadurch die Gesamtlängen der zu messenden Linien, wie für a und b schon auseinandergesetzt, sich beträchtlich verkürzen[1].

[1] Die sonstigen Folgen der Generalisierung können hier außer Erörterung bleiben.

„Gänzlich die Messung unregelmäßiger Linien auf geographischen Karten deshalb beiseitezusetzen, wie man von mathematischer Seite verlangt hat, erscheint dennoch unmöglich, da man für zahllose Erdgegenden auf topographische Karten für Generationen hinaus nicht wird rechnen dürfen. Es wird aber schon viel gewonnen sein, wenn man bei allen diesen Ausmessungen die Karten erreichbar größten und zugleich möglich gleichen Maßstabes anwendet und viel Kontrollmessungen ausführt[1]."

Orometrische Messungen.

Für Isohypsen und Isobathen (Fall c) gelangt man mit abnehmendem Maßstab und zunehmender Generalisierung bald dahin, daß die Schichthöhen immer größer werden müssen, bis die Schichtlinien schließlich ganz verschwinden. Wann dies eintritt, hängt vom Böschungswinkel ab, denn die horizontale Entfernung der Schichtlinien voneinander ist gleich dem Produkt von Schichthöhe und Kotangente des Böschungswinkels. Die Isohypse kann nicht mehr dargestellt werden, sobald dieser Wert im Maßstab der Karte die durch Zeichnung, Reproduktion und Papierbeschaffenheit bedingte Fehlergröße erreicht. — Während bei Meßtischblättern 1:25000 die Niveaulinien bei flachen Böschungswinkeln noch in Schichtabständen von 5 m gezogen werden können, sind bereits bei topographischen Karten im Maßstabe 1:200000 Isohypsen mit 20 m Abstand kaum noch im flachsten Hügelgelände darstellbar, es sei denn, daß man auf die ganze Situationsdarstellung und Schriftzeichnung verzichtet[2]. In Sydow-Wagners Schulatlas 1910, Tafel 5 finden sich Beispiele für Generalisierung der Geländezeichnung in Höhenkurven bei Verminderung des Kartenmaßstabes, und zwar für Mittelgebirge (Harz) und Hochgebirge (Rhonetal). Man erhält danach umstehende Übersicht.

Die Längenausmessung der Isohypsen und Isobathen spielt eine große Rolle für oro- und hydrographische sowie geologische Zwecke, schließlich auch zur Bemessung der den Atmo-

[1] H. Wagner, Lehrbuch 1908, S. 245.

[2] Zu Sonderzwecken werden derartige Karten hin und wieder hergestellt. S. z. B. Olbrichts Höhenschichtenkarte der Lüneburger Heide 1:200000 in Petermanns Mitteilungen 1910 II, Heft 3.

Nr.	Maßstab	Schichtenabstand	
		Mittelgebirge m	Hochgebirge m
1	1:1 250 000	100	500
2	1:2 500 000	200	800—1000
3	1:5 000 000	200	1000

sphärilien ausgesetzten wirklichen Erdoberfläche. Die Orometrie ist zur Bestimmung der mittleren Böschungswinkel geradezu auf die Messung der Isohypsen angewiesen, auch zur Bestimmung der mittleren Höhe von geographischen Objekten, Ermittlung der hypsographischen Kurve usw. Zum Beispiel ist der mittlere Böschungswinkel zwischen zwei Isohysen

$$\text{tang } \beta = \frac{h \cdot l}{A - A_1},$$

worin h die Schichthöhe, l die Länge der oberen Isohypse, A das Areal der unteren, A_1 dasjenige der oberen Isohypse bedeutet. Der mittlere Böschungswinkel eines Berges ist

$$\text{tang } \beta = \frac{h}{A} \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots\ldots),$$

worin l_1, l_2, l_3 usw. die Längen der verschiedenen Isohypsen sind. Wagner[1] macht richtigerweise darauf aufmerksam, daß, abgesehen von der schon erwähnten Unsicherheit der Streckung, die gemessene Gesamtlänge der Schichtlinien bei Karten starker Verjüngung ein zu kleines Resultat ergibt, der mittlere Böschungswinkel also stets zu klein erscheint.

Es ist übrigens zu berücksichtigen, daß bei allen diesen orometrischen Werten nie die Messung von Linien allein, sondern stets in Verbindung mit der Flächenmessung oder letztere sogar nur allein in Betracht kommt, so daß hierbei meist von dem Einfluß des Maßstabes auf Längen- und Flächenmessungen die Rede sein wird.

[1] Lehrbuch 1908, S. 350.

Nachstehende Tabelle mit Erhebungen aus dem Gebiete der Lüneburger Heide zeigt den großen Einfluß des Maßstabes auf die Bestimmung des mittleren Böschungswinkels nach den S. 28 genannten Formeln. Es sind absichtlich flache Erhebungen ausgesucht; bei steilen würde der Maßstab von 1:200000 bei Schichtabständen von 10 m schon versagen.

Lfd. Nr.	Vermessungsobjekt	Meßtischblätter		Karte 1:200000		Bemerkungen
		Tangente	Winkel	Tangente	Winkel	
1	Wilseder Berg	0,04913	2° 49′	0,02256	1° 18′	Die Messungen begannen bei der Schichthöhe 100 m; die von dieser Isohypse eingeschlossenen Areale zeigten bei beiden Maßstäben fast völlige Übereinstimmung.
2	Falkenberg u. Harkenberg	0,05865	3° 21′	0,02610	1° 30′	

Noch größere Unterschiede in den Messungsergebnissen werden natürlich entstehen, wenn mit Verkleinerung des Maßstabes die Schichthöhen notwendigerweise vergrößert werden müssen.

Bei den drei Fällen a, b, c der S. 26 aufgestellten Klassifizierung hat sich ein Einfluß des Maßstabes als solchen ohne Rücksicht auf die Projektionsart feststellen lassen. Das Mißliche besteht aber — wie Wagner[1] mit Recht hervorhebt — darin, „daß man (solange es sich um geographische Linien handelt) kein rechnerisches Verfahren besitzt, um die Ergebnisse zu prüfen“. Anders ist dies im Falle 4, wo es sich um Entfernungsmessungen auf Karten aller Art, im besonderen auf geographischen und nautischen, handelt: Bestimmung der Orthodrome und der Loxodrome; für diese läßt sich von einem Einfluß des Maßstabes nur in dem eingangs erörterten allgemeinen Sinne reden. Hier ist es vielmehr der Gradnetzentwurf, der ausschlaggebend ist.

[1] Lehrbuch 1908, S. 245 a. a. O.

Einfluß des Gradnetzentwurfes.

I. Allgemeines.

Um den Einfluß der Projektionsart auf Messungen auf Karten zu ermitteln, ist es vor allem nötig, aus ihnen zu erkennen, in welcher Projektionsart sie ausgeführt sind, welches z. B. die längentreuen Linien und gegebenenfalls ihre Krümmungsradien sind, sowie wo der Indifferenzpunkt zu suchen ist. Leider lassen die meisten geographischen Karten diese Angaben vermissen. Eine erfreuliche Ausnahme machen diejenigen des Sydow-Wagnerschen Schulatlasses und neuerdings die Gradnetzfelder von Andrees Handatlas, die am Kartenrand beide auch die Flächengröße angeben.

Bezüglich des Einflusses der Projektionsart auf die Linienmessungen auf Karten gelten folgende Überlegungen:

Jede Linie wird auf der Karte verändert

1. durch das Verjüngungsverhältnis $\frac{1}{v}$, d. h. den Längenmaßstab der Karte,

2. durch den Wert m, d. h. den Längenmodul oder Verzerrungsfaktor, der seinerseits vom Verzerrungsgesetz abhängt und innerhalb jedes Gradnetzentwurfes nur für die Linien gleicher Linearverzerrung konstant ist.

Das Veränderungsverhältnis des wirklichen Längenteils beträgt somit $\frac{m}{v}$ und dient als Sondermaßstab für die Karte.

Die Grundlage für die Linearveränderung bilden die Meridiane und Breitenparallelen, deren wirkliche Maße aus dem Erdsphäroid bekannt sind. Man hat also auf jeder nicht winkeltreuen[1] Karte mit zwei Sondermaßstäben zu rechnen, einem meridionalen und einem in Richtung der Breitenparallelen gültigen.

Ist α die Länge auf der Karte, a die wirkliche Länge, so ist der Maßstab für alle längentreuen Linien (bei denen der Linearverzerrungsfaktor = 1 ist)

$$\frac{1}{v} = \frac{\alpha}{a}$$

[1] Zu vergleichen S. 20.

und für die ganze Länge von Linien gleicher Linearverzerrung

$$\frac{1}{v} = \frac{a}{m \cdot a}.$$

Wo diese ganz oder in einer Richtung fehlen, hat man sich die Linien, seien es nun gerade, regelmäßig gebogene oder mehrfach gekrümmte, in kleine Teile d zu zerlegen und für jeden einen mittleren Verzerrungsfaktor anzunehmen. Statt a ist dann zu setzen

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + \ldots + m_n d_n = \Sigma m d,$$

also

$$\frac{1}{v} = \frac{a}{\Sigma m d}.$$

In der Kartometrie sind v und m gegeben, oder vielmehr beide sollten gegeben sein. $a = \Sigma \delta$ (worin $\Sigma \delta$ die Summe der als gerade angenommenen Teilstrecken $\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 \ldots \delta_n$ der zu messenden Linie bedeutet) kann direkt auf der Karte gemessen werden. Gesucht wird die wirkliche Länge a oder diejenige der Summe ihrer Teilstrecken $a = \Sigma d$. Es ist dann $d = \frac{v}{m} \delta$, $\Sigma d = \Sigma \frac{v}{m} \delta$, worin $\Sigma \frac{v}{m} \delta$ die Summe der Werte von $\frac{v}{m} \delta$ (jedes Element der gezeichneten Kartenlinie für sich betrachtet) und Σd die Summe der wirklichen Teilstrecken, mit anderen Worten die Länge auf der Erde darstellt. Für Linien gleicher Linearverzerrung vereinfacht sich die Formel in $\Sigma d = \frac{v}{m} \Sigma \delta$, d. h., daß das Produkt der ganzen Kartenlinie mit dem reziproken Wert des Sondermaßstabes die wirkliche Länge der Linie auf der Erde ergibt. Ist der allgemeine Maßstab nicht zu klein und sind die Maschen genügend verengt, so wechselt der Längenmodul innerhalb eines Maschenvierecks nur wenig. Man kann daher sein Quadrat als konstant ansehen. Dieses ist nach Fiorini[1] gleich dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Moduln der durch den Maschenmittelpunkt gezogenen unendlich vielen Richtungslinien. Der (quadratisch) mittlere Längenmodul innerhalb einer kleinen Masche ist dann

$$m = \frac{M_1^2 + M_2^2}{2}.$$

[1] Misure lineari, S. 8; vgl. auch Hammer, S. 85.

Man erhält dann für die Kartometrie:

Gesuchte wirkliche Länge

$$a = \Sigma d = \Sigma \frac{v}{\sqrt{\frac{M_1^2 + M_2^2}{2}}} \delta = \Sigma \frac{\sqrt{2}\, v}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} \delta$$

oder für Linien gleicher Linearverzerrung (m konstant)

$$a = \frac{\sqrt{2}\, v}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} \Sigma \delta$$

und für längentreue Linien ($m = 1$)

$$a = v \Sigma \delta.$$

Für die Bestimmung von M_1 und M_2 gibt es zu fast allen Projektionsarten Tabellen, die auf dem Tissotschen Verzerrungsgesetz beruhen und um deren Errechnung sich außer Tissot selbst besonders Hammer verdient gemacht hat. Durch Hammer, Fiorini und Zöppritz-Bludau ist die Methode Allgemeingut geworden. Die Formel für die Messung einer beliebig verlaufenden mehrfach gekrümmten oder gebrochenen Linie (vgl. S. 33 Fall a—c) mittels des mittleren Längenmoduls (Verzerrungsfaktors) für jede Teilstrecke ist natürlich am ungenauesten, wenn die zu messenden Teilstrecken mit ihren mittleren Meridianen oder mit ihren Breitenparallelen sehr spitze Winkel bilden. Fiorini[1] tritt daher auch nur bedingt für ihre Anwendung ein, empfiehlt vielmehr, dann lieber einen Sondermaßstab für die Meridiane und einen anderen für die Breitenparallelen zu ermitteln und zu benutzen; besonders tut er dies, wenn die Gradnetzlinien einigermaßen mit den Kartenrändern gleichlaufen.

Für winkeltreue Gradnetzentwürfe gilt diese Einschränkung nicht, denn bei ihnen variiert der Längenmodul nur von Punkt zu Punkt, ist aber unabhängig von der Richtung. Es gibt also keine zwei verschiedenen Hauptmodule M_1 und M_2, diese sind vielmehr einander gleich und somit gleich dem mittleren Modul M.

[1] a. a. O. S. 10.

Die Formel

$$m = \sqrt{\frac{M_1^2 + M_2^2}{2}}$$

vereinfacht sich in der Tat für $M_1 = M_2$ zu

$$m = \sqrt{\frac{2M^2}{2}} = M.$$

Auf den ersten Blick sollte man meinen, daß infolgedessen winkeltreue Karten sich besonders gut zu Längenmessungen eignen würden. Dies ist aber nicht bedingungslos der Fall, da gerade bei den winkeltreuen Gradnetzentwürfen die Veränderung des Längenmoduls von Punkt zu Punkt besonders stark ist. (Vgl. u. a. Mercators Projektion.) Hammer[1] tritt trotzdem bei Längenmessung vielfach und stark gekrümmter Strecken tatsächlich für winkeltreue Karten ein, verlangt allerdings ausdrücklich Zerlegung in recht kleine Stücke. In diesen kann dann das Längenverhältnis in allen Azimuten innerhalb eines kleinen Kreises als konstant angesehen werden.

Die praktische Ausführung der Längenmessungen für unregelmäßig gekrümmte und gebrochene Linien (Flußläufe, politische Grenzen u. dgl.) läßt sich in folgende praktische Methoden gliedern:

a) Man mißt auf der Karte den Gesamtumfang der Masche oder Maschenzone, wozu man in vielen Fällen zweckmäßig das Kurvimeter anwenden wird, und stellt diese Gesamtlänge mit der Gesamtlänge der aus dem Erdsphäroid bekannten wirklichen Länge in Vergleich.

b) Man ermittelt die Länge der in den beiden Hauptrichtungen gezogenen Mittellinien der Maschen und stellt die Summe der beiden in Vergleich mit der Summe der beiden wirklichen, aus dem Erdsphäroid entnommenen Längen.

c) Man verfährt wie unter b, nimmt aber nicht die Summe, sondern multipliziert die Längen der beiden Mittellinien miteinander und zieht aus dem Produkt die Wurzel.

d) Man ermittelt den Flächeninhalt der Masche mittels des Planimeters und verfährt dann wie unter c.

[1] Hammer, S. 79.

Die Verfahren a und b erwähnt Fiorini in der mehrerenorts zitierten Schrift[1], während c und d vom Verfasser im Verfolg seiner Ausführungen von S. 21 vorgeschlagen werden.

Sinngemäß wird auch verfahren, wenn statt des Gradnetzes der Karten trigonometrische Punkte aus dem Triangulationsnetz vorhanden sind, wobei es indes häufig nötig wird, zwei oder mehrere Dreiecke zusammenzulegen, um nicht mit zu zahlreichen Mittelwerten operieren zu müssen und weil Dreiecke mit sehr spitzen Winkeln sich schlecht zur Quadratur wie auch zur kurvimetrischen Ausmessung eignen.

Ob man bei der Maschenausmessung jede einzelne Masche zum Vergleich heranziehen muß oder aber nur Maschenzonen, hängt vom Maßstab und dem Gradnetzentwurf ab. Es hängt aber auch weiter ab von dem Anspruch, der in jedem einzelnen Falle an die Genauigkeit des Resultats der Messung, ihrem jeweiligen Zweck entsprechend, gestellt wird. Man hat es in der Hand, diese Genauigkeit nach Belieben zu steigern, indem man durch Hilfslinien die Maschenweite mehr und mehr verkleinert, bis ihr Inhalt schließlich mit dem entsprechenden Globusausschnitt als gleichbedeutend betrachtet werden kann. Die Grenze hierfür ist in den schon behandelten, der Kartenreproduktion und der Individualität des Messenden innewohnenden Fehlern gegeben.

Für eingezeichnete Orthodromen und Loxodromen wäre die Anwendung der Formeln und Methoden wie bei mehrfach gekrümmten und gebrochenen Linien zwar gleichfalls möglich, aber doch zu umständlich. Für nicht eingezeichnete (S. 26, Fall d) bedarf es aber anderer Methoden. Hierfür ist eine Betrachtung der einzelnen Projektionsarten unerläßlich, soweit man sich nicht auf rechnerische Feststellung der Länge der Linien beschränken will, was natürlich möglich ist, und zwar für die Orthodrome mittels der einfachen sphärischen und für die Loxodrome mit Hilfe der loxodromischen Trigonometrie, welch letztere immerhin komplizierte Formeln aufweist (vgl. S. 15, Fußnote 1).

Geben nun die Formeln die dürre Darstellung des Einflusses des Maßstabes und des Gradnetzentwurfes, so gewinnen

[1] Misure lineari, § 9 S. 18 nebst Fußnote dazu.

sie erst Leben, wenn man die Werte von M für die verschiedenen Projektionsarten, namentlich auch im Hinblick auf die Richtungen der Verzerrungen, also auf die Lage der Achsen der Indikatrix[1] untersucht. Eine kurze Erörterung der verschiedenen Projektionen ist daher, auch wenn sie nur wenig Neues bringt, nicht zu vermeiden.

II. Azimutale Projektionen.

Die azimutalen Projektionen unterscheiden sich untereinander durch das Halbmessergesetz als Funktion der Zenitdistanz δ. Die Entwürfe sind also auch zenital, d. h., alle vom Hauptindifferenz- oder Mittelpunkt des darzustellenden Gebiets gleichweit entfernten Punkte sind auch auf der Karte gleichweit entfernt; sie liegen also im Ur- wie im Abbild auf einem horizontalen Kreise. Daraus folgt, daß an allen Punkten eines um die Kartenmitte beschriebenen Kreises gleiche Verzerrungen stattfinden. Wenn also eine Karte in normaler oder polständiger Azimutalprojektion vorliegt, so sind die auf der Karte eingezeichneten Breitenkreise, die als konzentrische Kreise erscheinen, Linien gleicher Verzerrung. Ist der Entwurf nicht polständig, sondern transversal oder schiefachsig, so müssen die Linien gleicher Verzerrung eingezeichnet werden, was keine Schwierigkeiten bereitet, da sie, wie gesagt, stets konzentrische Kreise sind. Zu diesem Zweck muß der Berührungspunkt der Projektionsebene mit der Kugel bekannt sein. Gewöhnlich wird er mit der Kartenmitte zusammenfallen. Um diesen als Mittelpunkt sind dann die Linien gleicher Verzerrung (Horizontalkreise) zu ziehen. Der Radius ist nach dem für den Gradnetzentwurf gültigen Halbmessergesetz leicht zu finden.

1. Die mittabstandstreue, von Breusing speichentreue[2] genannte Projektion [$m = f(\delta) = \text{arc } \delta$].

Hier ist die Vergrößerung in radialer Richtung $= 0$. Man hat es also nur mit Verzerrungen in einer Richtung zu tun.

[1] Der von Tissot aufgestellte Begriff der Indikatrix und ihrer Achsen als Grundlage der Verzerrungsgesetze wird im nachstehenden als bekannt vorausgesetzt. Man vergleiche darüber Tissot-Hammer, S. 8, Zöppritz-Bludau I, S. 17.

[2] Breusing, Das Verebnen der Kugeloberfläche, Leipzig 1892, S. 9, § 10.

Der Verzerrungsfaktor (Linearmodul) ist a $\frac{\text{arc } \delta}{\sin \delta}$. Im folgenden einige Beispiele: Ist δ 10°, so beträgt die gefundene Länge, wenn die Soll-Länge 1 ist, 1,005; ist $\delta = 30°$, so ist die gefundene Länge = 1,047 usw. Die Formel zeigt, daß, je größer δ wird, auch der Fehler um so größer wird, da die Differenz zwischen arc δ und sin δ bei größer werdenden δ auch immer größer wird. Fällt nun die zu messende Orthodrome zusammen mit einem Meridian, so ist der Fehler = 0 und das Ergebnis nur abhängig vom Messungsfehler, der seinerseits in der bekannten Weise vom Maßstab abhängt.

Ist die Orthodrome normal zu a — was nur in dem einen Falle möglich ist, wenn sie mit dem Äquator zusammenfällt —, so ist δ 90°. Der Verzerrungsfaktor $\frac{\text{(arcus)}}{\text{(sinus)}}$ beträgt in diesem Falle, da arc $90 = \frac{\pi}{2}$ ist und sin $90° = 1$,

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}571.$$

2. Die orthographische oder reifentreue[1] Azimutalprojektion [$m = f(\delta) = \sin \delta$].

Perspektivisch betrachtet ist sie so zu deuten, daß sich das Auge des Beschauers in unendlicher Ferne befindet, daß also alle Sehstrahlen parallel sind. Sie ist aber leichter zu behandeln, wenn sie als azimutale Projektion angesehen wird.

Ihr Verzerrungsfehler ist 0, wenn die zu messende Linie mit einer Breitenparallele bzw. einer zum Großkreis Parallelen zusammenfällt, da in tangentialer Richtung keine Verzerrung stattfindet. Die andere (b-) Achse der Indikatrix muß also in radialer Richtung liegen. Das Verzerrungsgesetz für diese lautet b cos δ. Da cos 1 ist, muß der Fehler negativ sein, d. h., die Längen in radialer Richtung werden bei der Abbildung verkürzt.

Einen gewissen Vorzug hat allerdings die orthographische Projektion insofern, als bei ihr der Verlauf und die wahre Länge der Orthodrome konstruktiv mit Hilfe der darstellenden

[1] Breusing, S. 10, § 11.

Geometrie verhältnismäßig leicht festgelegt werden kann. Da diese Konstruktion eine gewisse kartometrische Bedeutung hat, aber wenig bekannt ist, so sei sie hier aufgeführt. Vgl. Anlage 3.

3. Die gnomonische Projektion [$m = f(\delta) = \tan \delta$].

Die Längenverzerrung beträgt $a = \sec^2 \delta$,
die in der Breite $b = \sec \delta$.

Die Verzerrung wird mit zunehmender Entfernung vom Kartenmittelpunkt außerordentlich groß, daher die Unbrauchbarkeit der Entwurfsart für die meisten geographischen Zwecke. Die Verzerrung beträgt, wenn $\delta = 45^\circ$ ist, in der Länge schon das Doppelte und in der Breite das 1,414fache. Fällt die zu messende Orthodrome mit einem Großkreis zusammen, so findet in tangentialer Richtung keine Verzerrung statt. Es braucht dann also nur diejenige in der a-Richtung berücksichtigt zu werden. Zur b-Richtung kann eine Orthodrome bei dieser Entwurfsart nie normal liegen, da dann $\delta = 90^\circ$ betrüge und dafür

$$b = \sec 90^\circ,$$
$$m = \infty$$

wäre, die Linie also ∞ weit vom Kartenmittelpunkt liegen müßte.

Trotz seiner beschränkten kartographischen Bedeutung erheischt der gnomonische Gradnetzentwurf ein besonderes kartometrisches Interesse, insofern als er den Vorteil hat, daß alle Großkreise als gerade Linien erscheinen. Man erhält somit den Verlauf der Orthodrome zwischen zwei Punkten einfach durch ihre geradlinige Verbindung. Ein Gradnetzentwurf dieser Art kann daher in hervorragender Weise als Hilfsmittel dienen, die Orthodrome in anderen Projektionen festzulegen. Man überträgt einfach die aus der gnomonischen Projektion entnommenen Schnittpunkte der Orthodrome mit Längen- und Breitengraden in die andere Entwurfsart, anstatt sie mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie zu berechnen. Da seit der Einführung der Dampfschiffahrt das „Segeln auf dem größten Kreise“ wieder in Gebrauch gekommen ist, hat die gnomonische Projektion für die Navigation an Bedeutung gewonnen, indem

sie als Hilfsgradnetz zur Eintragung der Punkte der Großkreiskurve in die nautische (Mercator-) Karte dient. Das Hydrographic Office in Washington hat fünf derartige Karten[1] herausgegeben, je zwei für den Atlantischen und Stillen, eine für den Indischen Ozean. Auch das in der britischen Marine gebräuchliche Great circle diagram von Godfray ist ein Gradnetz in gnomonischer Polarprojektion, das die halbe Erdkugel umfaßt.

Schließlich sei hier auf einen besonderen Fall aufmerksam gemacht, wo gnomonische Karten von allgemeinem kartographischen Nutzen sein können, nämlich zur flüchtigen Orientierung, welche Zwischenpunkte (z. B. Inseln) die kürzeste Verbindung zweier Endpunkte berührt[2].

4. Lamberts flächentreue Azimutalprojektion

$$\left[m = f(\delta) = 2 \sin \frac{\delta}{2}\right].$$

Da der Entwurf flächentreu ist, Flächentreue und Längentreue sich aber ausschließen, so muß in der einen Richtung (der a-Achse) eine Vergrößerung der Länge und in der entgegengesetzten Richtung eine ebensogroße Verkleinerung stattfinden. Konstruktiv kann der sich aus dem Halbmessergesetz ergebende Radius m als Sehne des Kreisbogens arc δ angesehen werden. Die kleine Achse b muß demnach in radialer Richtung liegen. Aus dem Halbmessergesetz ergibt sich ohne weiteres, daß, je mehr man sich von dem Berührungspunkt der Ebene mit der Kugel entfernt, die Verzerrung um so stärker wächst. Das Gesetz lautet: $b = \cos \frac{\delta}{2}$.

Für die Vergrößerung, die tangential Platz greift, lautet das Gesetz $a = \sec \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\cos \frac{\delta}{2}}$, d. h., a ist dem reziproken

[1] Eingehend besprochen in den Annalen der Hydrographie, 1890, V und 1892, VI; s. auch G. W. Littlehales „The development of great circle sailing", Washington 1899.

[2] H. Struve, Landkarten, ihre Herstellung und ihre Fehlergrenzen. Berlin 1887. Darin als Beispiel die orthodrome Verbindung Konstantinopel-Lissabon.

Wert von b, also

$$a = \frac{1}{b} \text{ und } b = \frac{1}{a} \text{ und } a \cdot b = 1.$$

Einige Zahlen mögen dies illustrieren: Ist $\delta = 20^0$, so ist die radiale Verzerrung (b) = 0,985, die tangentiale (a) = 1,015 und bei $\delta = 45^0$ a = 1,082 und b = 0,924.

Die in Rede stehende Projektion hat sich neuerdings viele Liebhaber erworben. Diercke gebraucht sie z. B. in seinem Schulatlas fast ausschließlich. Tissot, Zöppritz-Bludau u. a. treten warm für sie ein. Die Berechnung des Verlaufs der Orthodrome ist allerdings recht umständlich, so daß man auf das gnomonische Hilfsgradnetz oder auf die sphärisch-trigonometrische Berechnung zurückgreifen muß.

5. Die winkeltreue (stereographische) Projektion

$$\left[m = f(\delta) = 2 \text{ tang } \frac{\delta}{2}\right].$$

Bei dieser Azimutalprojektion muß bekanntlich der Kreis auf der Erdkugel wieder als Kreis auf der Karte abgebildet werden. Bei polständigen Gradnetzentwürfen erscheinen nur die Meridiane als gerade Linien, alle anderen Kreise auf der Erde wieder als Kreise. Infolge dieser Eigenschaft ist es leicht, bei dieser Projektion den Hauptbogen zwischen zwei Orten festzulegen, so daß man die Projektion in ähnlichem Sinne wie bei der gnomonischen als Hilfsgradnetz verwenden kann[1]. Zur Festlegung der Orthodrome verzeichnet man zu einem der beiden Orte den Antipodenpunkt (d. h. den Punkt von entgegengesetzter gleichhoher Breite und einer um 180° verschiedenen Länge). Legt man durch diese drei Punkte einen Kreis, so stellt dieser den verlangten Hauptbogen dar.

Da Kreise als Kreise erscheinen, so ergibt sich ohne weiteres, daß die beiden Indikatrixachsen einander gleich sein müssen. Das aus dem Halbmessergesetz für die winkeltreue Azimutalprojektion sich ergebende Verzerrungsgesetz lautet:

$$a = b = \sec^2 \frac{\delta}{2}.$$

[1] Paugger, Lehrbuch des terrestrischen Teils der Nautik. Triest 1874.

Da die Sekante eines Winkels stets > 1, so muß eine Vergrößerung der zu projizierenden Strecke stattfinden, und zwar wächst sie recht erheblich, nämlich mit dem Quadrat der Sekante; so ist bei

$\delta = 10^0$ die Vergrößerung $= 1{,}008$,
25^0 „ „ $= 1{,}049$,
45^0 „ „ $= 1{,}172$,
90^0 „ „ $= 2{,}000$.

Diese immerhin beträchtliche Vergrößerung ist ein Übelstand, den dieser Gradnetzentwurf mit allen winkeltreuen teilt.

Wenn man den Verlauf einer normalen Orthodrome verfolgt, so ist er in radialer Richtung notwendigerweise derselbe wie in tangentialer. Es bedarf also nur noch der Erörterung der nichtnormalen Orthodrome mit beliebigem Azimut. Hierbei kann man, um richtige Werte zu erhalten, da a stets $= b$, die Verzerrung also nach allen Richtungen die gleiche ist, innerhalb einer Zone die auf der Karte gemessene Linie einfach durch den einen mittleren Verzerrungsfaktor dividieren. Man erhält also wenigstens für kleinste Maße bei diesem Verfahren in jedem Punkt nicht wie bei den anderen Projektionen Annäherungswerte, sondern genaue Werte.

6. Breusings vermittelnde Azimutalprojektion.

Es gibt unendlich viele Azimutalprojektionen, da ein Gradnetzentwurf einfach durch das Halbmessergesetz formuliert werden kann, worunter stets die Funktion der Zenitdistanz zu verstehen ist. Die bisher behandelten Halbmessergesetze waren

$f(\delta) = \text{arc } \delta$ (mittabstandstreu),
$f(\delta) = \sin \delta$ (orthographisch),
$f(\delta) = \text{tang } \delta$ (gnomonisch),
$f(\delta) = 2 \cdot \sin \frac{\delta}{2}$ (flächentreu),
$f(\delta) = 2 \cdot \text{tang } \frac{\delta}{2}$ (winkeltreu).

Es steht nichts im Wege, irgend ein anderes Gesetz aufzustellen und danach eine Karte zu entwerfen. Es hätte dies aber wenig Zweck, da eine Karte, die weder flächentreu noch winkeltreu

ist, noch längentreue Linien besitzt, für den Geographen in der Regel nur geringen Wert hat[1], denn die Aufgabe des Kartographen besteht darin, daß er die Punkte der Erdoberfläche nach einem ganz bestimmten mathematischen Gesetz überträgt, und zwar so, daß ihre Anordnung einer bestimmten Anforderung Genüge leistet. Breusings vermittelnde Azimutalprojektion will nun möglichst große Flächentreue bei geringster Winkelverzerrung wahren, sie will also „vermitteln". Vom Standpunkt der Kartometrie kann man sie wohl auch als „mitteltreue" bezeichnen. Ihr Halbmessergesetz lautet:

$$f(\delta) = \frac{2 \cdot \sin \frac{\delta}{2}}{\sqrt{\cos \frac{\delta}{2}}} = 2 \sqrt{\sin \frac{\delta}{2} \cdot \tan \frac{\delta}{2}}.$$

Dieser Wert stellt das geometrische Mittel zwischen winkeltreuer und flächentreuer Projektion dar.

Die Verzerrung ist

$$a = \frac{1}{\sqrt{\cos^3 \frac{\delta}{2}}} \quad \text{und} \quad b = \frac{1 + \cos^2 \frac{\delta}{2}}{2 \sqrt{\cos^3 \frac{\delta}{2}}}.$$

a liegt in tangentialer und b in radialer Richtung, z. B. für

$\delta = 10^0$ ist $a = 1{,}013$ und $b = 1{,}004$,

$\delta = 45^0$ ist $a = 1{,}126$ und $b = 1{,}044$.

Die Linien werden also in tangentialer Richtung bedeutend mehr verzerrt als in radialer. Dieser Gradnetzentwurf ist bisher nur selten angewendet worden; in Debes Handatlas findet er sich für Amerika.

Es ist hier der Ort, auf die S. 17 schon erwähnte Methode zur Beurteilung des Einflusses des Gradnetzentwurfes auf die Darstellung und das Messen auf Karten zurückzukommen. Es handelt sich um die von Penck ersonnene und in der mehrfach erwähnten „Kartenkunde" an dem Beispiel einer Karte 1:100000 erörterte Methode mit der Formel:

$$\text{Fehler} = \operatorname{arc} \frac{1}{v} - f \cdot \frac{1}{v}.$$

[1] Vgl. Breusing, S. 3.

Der Verfasser des betreffenden Teiles der genannten Kartenkunde untersucht diesen Fehler für ein Gradfeld zwischen 50° und 51° Breite entsprechend 8 Blättern der Karte des Deutschen Reiches, und zwar für azimutale Entwürfe und errechnet (infolge eines Rechenfehlers) eine größte Differenz von 3,5 mm, womit er sich schon sehr befriedigt erklärt. In Wirklichkeit ist der Fehler nur der hundertste Teil davon, also 0,035 mm, kommt also zahlenmäßig erst in der zweiten Dezimalstelle der Millimeter zum Ausdruck, d. h. er ist praktisch gleich Null. Dasselbe Gradfeld — in der geographischen Länge (also Kartenbreite) doppelt genommen — würde einem Blatt der Übersichtskarte von Mitteleuropa 1:300000 entsprechen. Auch hier wäre der Fehler erst in der zweiten Dezimale bemerkbar. Man könnte daher direkte Längenmessungen noch auf einer Karte vornehmen, die 4 und selbst 9 zusammengelegten Blättern 1:300000 entspräche, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, nach welcher azimutalen Projektionsart auch immer die Karte ausgeführt würde. Der Fehler erreicht dabei noch nicht 2 mm. Die Formeln lauten:

		Fehler in radialer Richtung	Kartenmaß radial mm
$f = \text{arc}\ \frac{1}{v}$	(mittabstandstreu)	± 0	906,72
$f = 2\,R \sin \frac{\text{arc}\ \frac{1}{v}}{2}$	(flächentreu)	negativ	905,78
$f = 2\,R \operatorname{tang} \frac{\text{arc}\ \frac{1}{v}}{2}$	(stereographisch)	positiv	908,00
$f = R \operatorname{tang} \text{arc}\ \frac{1}{v}$	(gnomonisch)	positiv	908,70 Maximum.

Nicht größer sind auch die Fehler in tangentialer Richtung, nur muß hier natürlich vom Ausgangspunkt die orthographische Projektion $f(\delta) = \sin \delta$ gelten, da dies die einzige Projektion ist, bei der die Breitenkreise längentreu abgebildet sind. Die Länge der Breitenkreise beträgt

$$2\,R\,\pi \cdot \sin \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{v}.$$

Der genannten Kartengröße entsprechen 9 Blatt der Karte 1:300000, und es würde der Umfang des größten Breitenkreises, der noch völlig in das Kartenbild fällt, bei längentreuer Darstellung (orthographische Projektion) 3767 mm betragen. In der gnomonischen Projektion $f(\delta) = \text{tang } \delta$, welche in tangentialer Richtung die größte Verzerrung aufweist, würde der Umfang 3768,3 mm betragen, woraus sich abermals ergibt, wie außerordentlich gering auf topographischen Karten die Abweichungen vom richtigen Maß sind.

Für das praktische Messen in radialer Richtung empfiehlt sich die Konstruktion von Maßstäben, deren Nullpunkt im Kartenmittelpunkt anzulegen ist und deren Einteilung einfach nach dem Halbmessergesetz in Berücksichtigung des Maßstabes erfolgt. Zöppritz-Bludau[1] hat die Maßstäbe der gebräuchlichen Azimutalprojektionen nebeneinander aufgezeichnet. Diese Darstellung gibt ein besonders anschauliches Bild von der Verschiedenheit der Verzerrung der in Betracht kommenden Gradnetzentwürfe.

III. Kegelprojektionen.

Die Abbildung auf der Kegelfläche ist folgendermaßen gedacht: Zunächst muß man festsetzen, wie die Achse des Kegels liegen soll, ob mit der Erdachse zusammenfallend, ob identisch mit einem Äquatorhalbmesser, oder endlich, ob identisch mit einem beliebigen Kugelhalbmesser. Je nachdem nun eine dieser drei Forderungen erfüllt wird, hat man es mit einem normalen, transversalen oder schiefachsigen Entwurf zu tun. Ist die Lage der Kugelachse festgelegt, so muß zunächst der Winkel an der Spitze des Kegels bestimmt werden. Nach diesem richtet sich wieder die Veränderung des Winkels λ, den die Meridiane miteinander bilden. Dies ist leicht einzusehen, wenn man daran denkt, daß der Kegelmantel aufgeschnitten wird und dann in Form eines Kreissektors ausgebreitet liegt. Je kleiner nun der Winkel an der Spitze des Kegels war, um so kleiner wird der Sektor sein, d. h. um so stärker verkleinert erscheinen die Meridianwinkel. Bestimmt wird dieser Kegelwinkel durch die Kon-

[1] Leitfaden der Kartenentwurfslehre I 78.

stante n, die daher auch gleich das Maß der Veränderung der Meridianwinkel ausdrückt.

Endlich muß noch das Gesetz gegeben werden, nach dem die Parallelkreise abzubilden sind. Das Abbildungsgesetz der Meridiane liegt auf der Hand. Man verlängert die Meridianebenen, bis sie den Kegelmantel in Form gerader Linien schneiden. Das Gesetz für den Radius m, nach dem die Parallelkreise abzubilden sind, wird nun genau wie bei den azimutalen Projektionen, die als Kegelprojektionen mit $n = 1$ betrachtet werden können, in Funktion der Poldistanz ϑ ausgedrückt.

Hieraus folgt, daß alle Parallelkreise auf der Karte als konzentrische Kreise abgebildet werden und daß sie Äquideformaten sind. Diese Tatsache ist für die kartometrische Betrachtung von äußerster Wichtigkeit, da die Äquideformaten nicht erst eingezeichnet zu werden brauchen, sondern sich aus dem vorhandenen Gradnetz von selbst ergeben. Wenigstens ist dies bei der normalen Projektion richtig. Bezüglich der nicht normalen und transversalen Entwürfe ist aber zu sagen, daß sie bisher noch nicht praktisch verwertet wurden. Vorgeschlagen sind sie zwar, zuerst von Zöppritz für Afrika[1]; Breusing[2] u. a. lehnen sie aber mit Recht ab, da das Kartenbild zerrissene Meridiane aufweist[3].

Das Messen auf normalen konischen Gradnetzentwürfen hat durchaus Ähnlichkeit mit dem auf polständigen azimutalen, da bei beiden die Meridiane als gerade Linien, die Breitenparallelen als Kreisbogen erscheinen. Die einzelnen Arten der konischen Projektionen haben daher auch große Ähnlichkeit mit den entsprechenden azimutalen.

1. Die einfache oder gewöhnliche mittabstandstreue Kegelprojektion.

Die Projektion wird auch wahre, äquidistante oder auch wohl ptolemäische genannt, genauer „konische Projektion mit längentreuem Mittelparallel und längentreuen Meridianen".

[1] Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin, Bd. XIX, 1884, S. 22 und Bd. XXVI, 1891, S. 145.

[2] Breusing, S. 58.

[3] Man vergleiche hierzu die von Zöppritz-Bludau (I 90) entworfene Skizze von Afrika. Bezüglich der näheren Ausführung einer solchen Projektion sei auf Hammer, Kartenprojektionen, S. 88 und S. 138 verwiesen.

Hieraus ergibt sich das Gesetz für den Halbmesser m eines beliebigen Parallelkreises δ

$$m \quad \text{tang } \delta \pm \text{arc } \varepsilon,$$

wo arc ε die wirkliche Entfernung des Parallelkreises δ vom Mittelparallel δ_0 in Bogenmaß ausgedrückt angibt, und wo das Vorzeichen davon abhängt, ob $\delta \lessgtr \delta_0$ ist.

Schon die Anschauung zeigt uns, daß die Parallelkreise bei der Abbildung eine Vergrößerung erfahren müssen, denn die Kegelfläche liegt außerhalb der Kugel. Wenn also die Parallelkreise auf Kegel und Kugel gleichen Abstand ε vom Berührungskreise haben, so müssen sie vergrößert werden. Sie sind außerdem noch Äquideformaten; demnach liegt die Indikatrixachse a parallel den Horizontalkreisen. Für sie gilt das Verzerrungsgesetz:

$$a = \frac{\sin \delta_0 - \text{arc } \varepsilon \cdot \cos \delta_0}{\sin \delta}.^1$$

Die b-Achse liegt in der Richtung der Meridiane und muß nach aufgestellter Forderung immer $= 1$ sein: Orthodrome im Meridian sind längentreu. Fällt die a-Achse auf den Berührungsparallelkreis δ_0, so wird $\varepsilon = 0$; die Formel lautet also: $a = \frac{\sin \delta_0}{\sin \delta_0}$. a wird demnach $= 1$, d. h. der Berührungsparallel wird längentreu abgebildet.

Die Größe der Verzerrung ist außer von der Ausdehnung in die Breite auch von der Lage des Mittelparallels d_0 (bzw. der Größe n) abhängig. Nachfolgend einige Werte für a, wenn $\varphi_0 = \delta_0 = 45^\circ$ ist.

$\varphi = 60^\circ$ $\quad a = 1{,}044$
$\varphi = 30^\circ$ $\quad a = 1{,}030$
b immer $= 1$.

2. Die konische Projektion von De l'Isle (Delisle).

Sie hat neben der Längentreue der Meridiane zwei Parallelkreise, die längentreu sind. Diese Forderung ist nicht so zu definieren, als wenn ein Schnittkegel vorliegt, der die Kugel in den beiden längentreu abzubildenden Kreisen schneidet, da

[1] Tissot-Hammer, S. 146.

in diesem Falle zwar die Längentreue der beiden Parallelkreise gewahrt, aber keine Längentreue der Meridiane vorhanden wäre. Der Halbmesser m der Parallelkreise wird durch andere Betrachtungen gefunden. Sein Gesetz lautet:

$$m = \operatorname{tang} \delta_0 \frac{\operatorname{arc} \varepsilon_0}{\operatorname{tang} \varepsilon_0} - \operatorname{arc} \varepsilon.$$

Die Größe von n beträgt

$$n \quad \frac{\cos \delta_0 \cdot \sin \varepsilon_0}{\operatorname{arc} \varepsilon}$$

$$(\varepsilon_0 = \delta_1 - \delta_0 = \delta_0 - \delta_2).$$

Da der Kegel innerhalb der Zone liegt, die durch die beiden als längentreu abzubildenden Parallelkreise gebildet wird[1], so findet hier eine Verkleinerung der Parallelkreise statt. Parallel diesen Kreisen liegt also die kleinere b-Achse, die < 1 sein muß; denn wenn b identisch ist mit einem längentreuen Parallelkreise, so ist $b = 1$; liegt b innerhalb dieser beiden Kreise, so muß b also, da die dazwischen liegenden Parallelkreise, wie eben gezeigt, kleiner sind, ebenfalls kleiner sein. Innerhalb dieser Zone fällt also die Indikatrixachse a mit den Meridianen zusammen und ist dauernd > 1. Außerhalb der Zone tritt eine Vergrößerung der Parallelkreise ein. Hier liegt ihnen also a parallel, da $a > 1$ und $1 > b$ ist. b fällt also (außerhalb der Zone) mit den längentreuen Meridianen zusammen.

Da hier a und b in verschiedenen Richtungen liegen, einmal in tangentialer, das andere Mal in radialer, so hat man hier, um eine Formel zu haben, die für alle Fälle gilt, andere Größen eingeführt. Man versteht unter k das Längenverhältnis der Kartenparallelen zu den Kugelparallelen und unter h das Längenverhältnis der Kartenmeridiane zu den Kugelmeridianen, das in dem behandelten besonderen Falle dauernd $= 1$ ist.

[1] Anmerkung: Hierin scheint ein Widerspruch zu liegen, denn es wurde gesagt, daß man es mit keinem Schnittkegel zu tun habe, der durch diese beiden Parallelkreise geht. Trotzdem ist diese Betrachtung richtig, wenn man sich zuerst einen Schnittkegel vorstellt, diesen aber, bevor er aufgerollt wird, innerhalb der Zone um die Differenz zwischen wahrer Länge der Meridiane und der durch die Sehne des Meridianbogens dargestellten verkürzten Länge in die Länge gezogen denkt.

Vgl. auch Zöppritz-Bludau I 95—98.

Für die Verzerrung eines beliebigen Parallelkreises gilt die folgende Formel:

$$k = \frac{\sin \delta_0 \cdot \cos \varepsilon_0 - \text{arc } \varepsilon \dfrac{\cos \delta_0 \cdot \sin \varepsilon_0}{\text{arc } \varepsilon_0}}{\sin \delta},$$ [1]

wobei δ_0 die Hauptpunkt- (Pol-) Distanz für den Parallelkreis ist, der genau zur Hälfte zwischen den beiden längentreuen Parallelkreisen δ_1 und δ_2 liegt. Wird in dieser Formel

$$\delta = \delta_1 \text{ oder } \delta_2,$$

so wird $k = 1$, was ja den Tatsachen entspricht.

Nachfolgend zwei Beispiele: wenn $\delta_0 = 35°$, $\delta_1 = 42° 30'$ und $\delta_2 = 27° 30'$; ist $\varepsilon = 40°$, so ist $a = 1{,}0215$ und $b = 1{,}000$; ist $\varepsilon = 60°$, so ist $a = 1{,}000$ und $b = 0{,}995$. Im ersten Falle ist $a = k$; $b = h$. Im zweiten Falle ist $a = h$, $b = k$.

3. Flächentreue Kegelprojektionen.

a) Das Halbmessergesetz der flächentreuen Azimutalprojektion lautet allgemein $f(\delta) = 2 \sin \frac{\delta}{2}$. Für den Halbmesser m der Parallelkreise bei flächentreuen Kegelprojektionen gilt folgende Formel:

$$m = \frac{2 \sin \delta/2}{\sqrt{n}}.$$

Für die Verzerrungsgrößen, die wieder mit h und k bezeichnet werden mögen, läßt sich allgemein sagen, daß $h \cdot k = 1$ sein muß, um der Forderung der Flächentreue gerecht zu werden, denn es soll S (Inhalt der Fläche der Indikatrix) = 1 gleich der der Kugelfläche werden, d. h.

$$a \cdot b \cdot \pi = r^2 \cdot \pi$$
$$a \cdot b = r^2$$
$$a \cdot b = 1^2 = 1.$$

Hieraus folgt, daß $h = \frac{1}{k}$ und umgekehrt $k = \frac{1}{h}$ ist. Da der Halbmesser der flächentreuen Azimutalprojektion nur durch $\sqrt{n}$ dividiert zu werden braucht, um gleich dem für die flächen-

[1] Tissot-Hammer, S. 146.

treue Kegelprojektion zu werden, so müssen für letztere auch dieselben Verzerrungsverhältnisse gelten wie für die Azimutalprojektion (s. S. 38) mit der Einschränkung, daß a und b mit $\sqrt{n}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ multipliziert werden müssen, um gleich h und k zu werden. Es ergeben sich also für h und k folgende Formeln:

$$k = \sqrt{n} \cdot \sec \frac{\delta}{2}$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \cos \frac{\delta}{2}$$ [1]

Wenn bei den flächentreuen Projektionen ein Parallel gleich dem der Kugel werden soll, also $h = k = 1$ wird, so muß, wie aus den Verzerrungsgleichungen unmittelbar hervorgeht,

$$\sqrt{n} = \cos \frac{\delta_0}{2}$$

also

$$n = \left(\cos \frac{\delta_0}{2}\right)^2$$

werden.

Der längentreue Parallel ist aber nicht der Berührungsparallel δ_1. Um nun zu bewirken, daß der längentreu abgebildete Parallel, wie es eine natürliche Forderung der Kartometrie ist, durch die Kartenmitte geht, verfährt man anders. Man sucht die Formel für den Halbmesser m_0 dieses Parallelkreises. Hieraus kann man dann leicht, da $k = h = 1$ sein muß, die Größe n bestimmen und hieraus wieder den Halbmesser m für jeden Parallelkreis. Liegt ein nach diesem Gesetz gebildeter Entwurf vor, so hat man es mit

b) Lamberts flächentreuer Kegelprojektion

zu tun mit dem Halbmessergesetz $m = \frac{2 \sin \delta 2}{\cos \delta/2}$ und $n = \cos^2 \frac{\delta_0}{2}$. Hierfür gelten die genannten Verzerrungsformeln

$$h = \frac{\cos \delta/2}{\sqrt{n}} \text{ und } k = \sqrt{n} \cdot \sec \delta/2.$$

[1] Tissot-Hammer, S. 138.

Kommt man vom Pol und geht bis zum längentreuen Mittelparallel, so zeigt die Formel, daß die große Indikatrixachse im Meridian liegt und > 1 ist. Darüber hinaus liegt sie im Parallelkreis und ist wieder > 1.

Weiter zeigt uns die Formel, daß die kleine Indikatrixachse b vom Pol bis δ_0 im Parallelkreis liegt und < 1 ist, und daß sie über δ_0 hinaus im Meridian liegt und wieder < 1 ist.

$$\begin{aligned} \text{h ist also bis } \delta_0 &> 1 \\ \text{bei } \delta_0 &= 1 \\ \text{nach } \delta_0 &< 1 \\ \text{und k ist bis } \delta_0 &< 1 \\ \text{bei } \delta_0 &= 1 \\ \text{nach } \delta_0 &> 1. \end{aligned}$$

Die Orthodrome wird also, wenn sie auf den Meridianen liegt, vom Pol bis δ_0 vergrößert wiedergegeben und über δ_0 hinaus verkleinert. Die mittlere Verzerrung ist also zonenweise in diesem Sinne in Rechnung zu bringen.

Ist die Orthodrome identisch mit dem Äquator, so findet wie bei der schon besprochenen Kegelprojektion eine Vergrößerung statt. Ist das Halbmessergesetz so gegeben, daß bei Flächentreue zwei Parallelkreise längentreu abgebildet werden, so liegt die

c) Kegelrumpfprojektion von Albers

vor. Ihr Name Kegelrumpfprojektion rührt daher, daß der Pol als ein Kreis abgebildet wird. Ihr Halbmessergesetz lautet:

$$m = \sqrt{m p^2 + \frac{4}{n} \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

woraus folgt

$$h = \frac{\sin \delta}{\sqrt{n \left(m p^2 + 4 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)}}$$

$$k = \frac{1}{\sin \delta} \sqrt{n \left(m p^2 + 4 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)}.$$

[1] Tissot-Hammer, S. 141 und wegen mp: Zöppritz-Bludau I 112/113.

Die beiden längentreu abgebildeten Parallelkreise haben die Poldistanz δ_0 und δ_1. Die die Karte begrenzenden Parallelkreise sind mit δ' und δ'' bezeichnet.

Die Größen h und k werden von δ_0, wo sie beide -1 sind, entweder zu- oder abnehmen, und bei δ_1 werden sie wieder beide -1 sein. Zwischen δ_0 und δ_1 liegt ein Parallelkreis, bei dem a ein Maximum und daher notwendigerweise b ein Minimum erreicht. Dieser Parallelkreis kann mit Hilfe folgender Gleichung gefunden werden:

$$\operatorname{tang} \frac{\delta_n}{2} = \sqrt{\operatorname{tang} \frac{\delta'}{2} \cdot \operatorname{tang} \frac{\delta''}{2}}.$$

Für die Längenverzerrung läßt sich nun zusammenfassend folgendes sagen:

Nimmt δ von δ' auf δ_0 zu, so nimmt a von a_M bis zu 1 ab;
„ δ „ δ_0 „ δ_M „, „ „ a „ 1 auf a_M zu;
„ δ „ δ_M „ δ_1 „, „ „ a „ a_M bis zu 1 ab;
„ δ „ δ_1 „ δ'' „, „ „ a „ 1 auf a_M zu.

In der Nähe des längentreu abgebildeten Parallelkreises δ_0 sind also die Verzerrungen gering, wachsen dann aber rasch bis δ_M und nehmen dann wieder ab, bis sie in der Nähe von δ_1 wieder gering werden. Auf δ_0 und δ_1 finden keine Verzerrungen statt. Für b gilt dasselbe Gesetz; b muß immer $= \frac{1}{a}$ sein. (Ausgeführte Rechnungen finden sich in Vital, S. 45.)

Verzichtet man auf die Längentreue des Mittelparallels, so kann man das Halbmessergesetz so formulieren, daß

d) bei Flächentreue möglichst geringe Winkelverzerrung erfolgt.

Um das Gesetz für diesen Fall zu bilden, nimmt man zwei Parallelkreise an, die nicht (mit der Zeichnung) überschritten zu werden brauchen. Diese die Zone begrenzenden Halbkreise seien δ' und δ''. Sie haben die Poldistanz δ_0 und δ_1.

Die aufgestellte Forderung läßt sich jetzt so formulieren: Es soll die Projektion bestimmt werden, welche für die zwischen

[1] Tissot-Hammer, S. 69.

zwei gegebenen Parallelkreisen δ' und δ'' eingeschlossene Zone die kleinste Winkelverzerrung hervorbringt. Man muß sie also so bestimmen, daß a oder k auf δ' und δ'' denselben Wert hat. Das Halbmessergesetz für sie lautet:

$$m = \frac{2 \sin \delta/2}{\sqrt{\cos \delta'/2 \cdot \cos \delta^2/2}}^{1}$$

Da nun jede flächentreue Kegelprojektion einen Meridian besitzt, der längentreu abgebildet wird, so muß auch diese Projektion einen solchen besitzen. Für ihn gilt die Gleichung

$$\cos \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{n} = \sqrt{\cos \frac{\delta'}{2} \cdot \cos \frac{\delta''}{2}}.$$

Von Wichtigkeit ist nun ein Sonderfall, nämlich wenn $\delta' = 0^0$ und $\delta'' = 90^0$ ist. Für diesen Fall wird $\sqrt{n} = \sqrt{\cos 45^0}$ $\sqrt{1/2\sqrt{2}}$ also $n = 1/2\sqrt{2}$.

Diese flächentreue Kegelprojektion mit $n = 1/2\sqrt{2}$ liefert in der Tat eine solche von geringster Winkelverzerrung, denn weiter oben war die Forderung aufgestellt worden, daß auf δ' und auf δ'' a denselben Wert haben soll, daß also $a' = a''$. Für die Größe von a' und a'' gilt folgendes:

$$a' = a'' = \sqrt{\frac{\cos \delta'/2}{\cos \delta''/2}}.$$

a' und a'', aus denen sich ohne weiteres b' und b'' ergeben, sind auch gleichzeitig die Maxima für die Längenverzerrung. Ihre Zahlenwerte sind

$$\sqrt{\frac{1}{1/2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt[4]{2} = 1{,}189.$$

Mithin ist der größte Verzerrungsfaktor für die Länge, also die Zahl, durch die man die gemessene Länge der mit dem Äquator identischen Orthodrome dividieren muß, 1,189.

[1] Zöppritz-Bludau I 107.

Für die übrigen Verzerrungen gilt folgende Entwicklung: Da die Projektion eine flächentreue ist, muß h nach vorher entwickeltem $= \frac{1}{k}$ sein

$$k = \sqrt{n} \cdot \sec \delta/2$$

$$\text{und } h = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \cos \delta/2$$

oder

$$k = \sqrt{0{,}707} \cdot \sec \delta/2$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{0{,}707}} \cdot \cos \delta/2.$$

Durch Rechnung hat Verfasser gefunden, daß, wenn $\delta'' = 90^0$ und $\delta' = 0^0$ ist,

$$\delta_0 = \sim 65^0\,30'$$

ist, daß also der Breitenkreis $24^1/_2{}^0$ längentreu abgebildet wird.

4. Die winkeltreuen echten Kegelprojektionen.

Bei diesen wird wegen der Winkeltreue die Indikatrix zum Kreise (a = b).

a) Das Gesetz für einen beliebigen Halbmesser δ lautet bei winkeltreuen Kegelprojektionen allgemein:

$$m = ma \, (\text{tang } \delta/2)^n. \; [1]$$

Setzt man $\delta = 90^0$, d. h., rechnet man den Halbmesser für den Äquator der Karte, so heißt die Formel, da tang 45 = 1 ist und 1^n auch 1 ist,

$$\delta \, (90) = ma.$$

Die im Halbmessergesetz vorkommende Konstante ma ist also geometrisch als der Halbmesser des abgebildeten Äquators zu deuten.

Außerdem erlaubt die Formel ohne weiteres, wenn man n = 1 setzt, die der winkeltreuen Azimutalprojektion herzuleiten. Für diese war ja das Halbmessergesetz $m = 2 \text{ tang } \delta 2$ (s. S. 39).

[1] Tissot-Hammer, S. 135.

Das Verzerrungsgesetz findet man derart, daß man a bildet aus dem Verhältnis des Kartenparallels δ zum Kugelparallel δ. Man findet dann

$$a = b = \frac{n \cdot ma \, (\sin \delta/2)^{(n-1)}}{2 \, (\cos \delta/2)^{(n+1)}}.$$ [1]

Je nachdem, welchen Wert man für n annimmt, ist man in der Lage, Nebenforderungen aufzustellen.

Man weiß, daß, wenn man $n = \cos \delta_0$ setzt, ein Parallelkreis δ_0 längentreu abgebildet ist. Es steht nun nichts im Wege, δ_0 gleich dem Parallel, der durch die Kartenmitte geht, zu machen.

b) Für die winkeltreue Kegelprojektion mit längentreuem Mittelparallel gilt also die Gleichung: $m = ma \, (\tan \delta \, 2) \cos \delta_0$.

c) Verzichtet man nun auf die Längentreue des Mittelparallels, so kann n so bestimmt werden, daß analog der De l'Isleschen Projektion zwei Parallelkreise längentreu abgebildet werden; für diesen Fall ist

$$n = \frac{\log \sin \delta' - \log \sin \delta''}{\log \tan \delta'/2 - \log \tan \delta''/2}.$$ [2]

Was ist danach über die Verzerrungen und ihren Einfluß auf Strecken zu sagen? Es sei zunächst die winkeltreue Kegelprojektion mit längentreuem Mittelparallel betrachtet. Das allgemeine Verzerrungsgesetz für winkeltreue Kegelprojektionen lautete:

$$a = b = \frac{n \cdot ma}{2} \cdot \frac{(\sin \delta/2)^{(n-1)}}{(\cos \delta/2)^{(n+1)}}.$$

Durch eine kleine Umformung und durch Einsetzen des Wertes für n erhält man dann den Wert von a und b für die in Rede stehende Projektion.

$$a = b = \frac{\sin \delta_0}{\sin \delta} \cdot \left(\frac{\tan \delta/2}{\tan \delta_0/2}\right)^{\cos \delta_0}.$$

[1] Tissot-Hammer, S. 136.
[2] Vital, S. 24.

Diese Formel zeigt zweierlei: 1. a wird um so größer, je größer n gewählt oder, da n cos δ_0, je kleiner der Polabstand δ_0 gewählt wird; 2. a muß stets ≥ 1 sein, so daß man es nur mit einer Vergrößerung der Längen zu tun hat. Ausgenommen hiervon ist der Parallelkreis δ_0, der längentreu abgebildet wird, so daß hier also $a = b = 1$ ist.

Im nachfolgenden einige Werte für a und b, wenn n 0,5 ist, δ_0 also $= 60^0$ oder $\varphi_0 = 30^0$,

wenn $\varphi = 0^0$, ist $a = 1{,}140$
$\varphi = 60^0$ $a = 1{,}180$
und $\varphi = 75^0$ $a = 1{,}598$.

Soll eine Hemisphäre abgebildet werden, so würde der Pol als ein Kreis erscheinen. Wenn φ 90^0, würde also a ∞.

Diese Werte, die Tissot für verschiedene Werte von n berechnet hat[1], sind in Anrechnung zu bringen, indem immer zonenweise die normal zum Meridian liegende Orthodrome gemessen und diese Länge durch das mittlere a dividiert wird. Genau so kann man, da eine winkeltreue Projektion vorliegt, auch bei nicht normal liegender Orthodrome verfahren. Gemessene Länge dividiert durch a gibt die wahre Länge.

Für die winkeltreue Kegelprojektion mit zwei längentreuen Parallelen gilt dasselbe, nur daß natürlich für n nicht cos δ_0 eingesetzt wird, sondern der weiter oben entwickelte Wert. Auch hier ist a stets 1, ausgenommen diesmal zwei Parallele, wo a 1 ist. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß winkeltreue Kegelprojektionen im allgemeinen für Längenmessungen ungeeignet sind, da die Verzerrungen der Längen zu erheblich sind (vgl. S. 33).

5. Unecht konische Entwürfe.

Eine Projektion, die sich früher unter den Kartographen einer außerordentlichen Beliebtheit erfreute, ist die Bonnesche unecht-konische Projektion.

Bei den echten Kegelprojektionen wurden die Parallelkreise nach einem Gesetz abgebildet, das als Funktion der Zenitdistanz δ gegeben war. Die Längenkreise wurden definiert

[1] Tissot-Hammer, Tafel (2).

durch die Konstante n, die das Maß der Veränderung des Schnittwinkels der Meridianebenen ausdrückt. Bei den unecht-konischen Entwürfen werden die Parallelkreise ebenfalls nach einem Gesetz abgebildet, das in Form der Zenitdistanz δ gegeben ist, sie werden also auch als konzentrische Kreise abgebildet. Doch die Meridiane erscheinen nicht mehr als gerade Linien, sondern als Kurven höherer Ordnung.

Entstanden kann man sich die Bonnesche Projektion so denken, daß man annimmt, das Gradnetz wird so gezeichnet wie das der mittabstandstreuen Kegelprojektion. Nun werden aber die Meridiane mit Ausnahme des längentreu abzubildenden Mittelmeridians nicht ausgezogen. Von diesem Mittelmeridian aus werden die Parallelkreise längentreu eingeteilt und diese Teilpunkte durch Kurven verbunden. Diese Projektion muß also auch flächentreu sein, was ohne weiteres zu sehen ist. Daher rührt auch ihre frühere große Beliebtheit. Doch hat Tissot in seinen Untersuchungen nachgewiesen[1], daß sie den Vergleich mit anderen flächentreuen Projektionen nicht aushalten kann, da bei ihr die Winkelverzerrungen zu beträchtlich sind. Die flächentreue Azimutalprojektion ist ihr, wie Tissot gezeigt hat, weit überlegen. Auch Zöppritz-Bludau[2] verurteilt sie sehr, während sie — namentlich für kleinere geographische Räume und für Streckenmessungen — in H. Wagner[3] einen Verteidiger gefunden hat.

Die Parallelkreise sind, wie gesagt, alle längentreu. Liegt also eine zu messende Linie parallel zu diesen, so ist der gefundene Wert ohne weiteres als der ursprüngliche anzunehmen. Dasselbe gilt natürlich, wenn sie annähernd im längentreuen Mittelmeridian liegt. Nicht so einfach ist es aber, wenn keiner von diesen beiden Fällen vorliegt, insofern, als die Parallelkreise nicht mehr Äquideformaten sind und es kein einfach definierbares Verzerrungsgesetz dafür gibt.

Trotz dieser ungünstigen Verhältnisse lassen sich direkte Längenmessungen ohne allzu große Fehler vornehmen. Es sei

[1] Tissot-Hammer, S. 80.
[2] Zöppritz-Bludau I 121/122 und 156.
[3] H. Wagner, Lehrbuch 1908, S. 218 sowie 243/244.

hier auf die Versuche von H. Wagner[1] verwiesen, der gefunden hat:

Nr.	Strecke	Benutzte Karten: Atlas	Blatt	Maßstab 1:	gefunden	soll	Fehler %
1	Köln – Königsberg .	Sydow-Wagners Schulatlas	16	5000000	995 km	1000 km	0,5
2	Madras—Tokio . . .		38	20000000	6440 „	6327 „	+ 2,0
3	Singapur—Tokio .		35	40000000	5500 „	5317 „	— 3,4

Hat man es endlich mit Flußläufen, Strandlinien u. dgl. zu tun, so wird es für das Ergebnis der Messung von Wichtigkeit sein, ob die zu messende Linie ziemlich mit den Breitenparallelen gleichlaufend ist oder recht vielgestaltige Windungen[2] macht. In beiden Fällen wird man leidlich genaue Messungen erhalten, vorausgesetzt, daß das Zentrum der Windungen einigermaßen mit der Kartenmitte zusammenfällt. Selbstredend muß der Einfluß des Maßstabes berücksichtigt werden, der sich ja, sobald er kleiner wird, durch immer mehr zunehmende Generalisierung bemerkbar macht.

Im Anschluß an die unecht-konischen Entwürfe seien nun noch

6. die polykonischen Entwürfe

kurz erwähnt. Hierbei ist es theoretisch noch schwieriger, die gemessene Länge auf ihr Urmaß zu reduzieren, andererseits ist aber zu berücksichtigen, daß der polykonische wie der Polyederentwurf nur für topographische Karten Anwendung findet. Diese können praktisch in allen Richtungen als längentreu[3] betrachtet werden. Gewisse Schwierigkeiten entstehen nur beim Messen auf mehreren Blättern, da sich kaum mehr als 4 oder höchstens 9 Blatt einwandfrei auseinanderlegen lassen.

Wie bei den azimutalen Projektionsarten, so möge auch hier ein Beispiel zur Beurteilung des Einflusses eines konischen Gradnetzentwurfes auf das Messen auf topogra-

[1] H. Wagner, a. a. O. S. 243/244.

[2] Hier sind nicht die kleinen bei der Generalisierung verschwindenden Windungen gemeint.

[3] Siehe S. 17 und 42.

phischen Karten angeführt werden. Es sei hierzu die in mehrfacher Beziehung interessante topographische Spezialkarte von Mitteleuropa 1:200000 gewählt[1]. Ihr Gradnetzentwurf ist normal-konisch, wobei der Kegelmantel die Erdoberfläche unter 50° n. B. berührt, welcher Breitengrad längentreu abgebildet ist. Bei dem zu 859,416[2] geographischen Meilen angenommenen Erdradius beträgt der Radiusvektor des Kegelmantels 721,1525 geographische Meilen = 5348,017 km. Für die Einteilung der Kartenblätter wird der Schnittpunkt des 30. Meridians (östlich von Ferro) mit dem 50. Parallelkreis als Indifferenzpunkt angenommen. Parallele Linien zu jenen beiden auf dem ausgebreiteten Kegelmantel sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien in Breitenabständen von 67,9343 km und Höhenabständen von 46,35784 km ergeben die einzelnen Kartenblätter als Rechtecke. Die nördlichsten liegen etwa 58°, die südlichsten etwa 45° n. B., mithin größtes $\varepsilon = \begin{matrix} +8^{0} \\ -5^{0} \end{matrix}$.

Lfd. Nr.	φ	δ	m	Bemerkungen
1	58°	32°	83,91 — 13,9624 = 69,9476	Die Konstante ist $n = \cos 40^{0} = 0{,}76604$, je 2 Meridiane, die auf der Erde den Winkel $\lambda = 1^{0}$ einschließen, schneiden sich im Kartenpol unter dem Winkel λ' = 0,76604° = 45,9624′ = 45′ 58″
2	$\varphi_0 = 50$	δ_0 40	83,91 — 0 = 83,91	
3	45	45	83,91 + 8,7265 = 92,6365	
	φ	δ	2ω | a S	
4	58°	32°	0° 38′ | 1,0111	
5	$\varphi_0 = 50$	δ_0 40	0° 0′ | 1,0000	
6	45	45	0° 12′ | 1,0036	

[1] Die nachstehenden Angaben und Berechnungen beruhen auf schriftlichen Mitteilungen der Kgl. Pr. Landesaufnahme vom Januar 1911.

[2] Bei dem nach Wagners Lehrbuch S. 118 betragenden Umrechnungsmaß von 1 geographischen Meile = 7420,44 m würden 859,416 geographische Meilen = 6377,245 km sein. Dieser Wert entspricht a. a. O. S. 120 fast genau dem Äquatorhalbmesser nach Bessel, während sein mittlerer Kugelradius sich auf nur 6370,283 km beläuft.

Die Verzerrungsverhältnisse ergeben sich aus der auf der vorigen Seite angeführten Übersicht unter Zugrundelegung eines Kugelhalbmessers von 100 Längeneinheiten; danach

$$m_0 \quad \text{tang } (90 - 50)'' \cdot 100 = \text{tang } 40'' \cdot 100 = 83{,}910.$$

Die nördlichsten Blätter messen somit in der Länge statt

$$67{,}934 \text{ nur } \frac{67{,}934}{1{,}0111} \quad 67{,}188 \text{ km; Differenz } 0{,}7463 \text{ km}$$

und die südlichen statt

$$67{,}934 \text{ nur } \frac{67{,}934}{1{,}0036} \quad 67{,}690 \text{ km; Differenz} = 0{,}2443 \text{ km.}$$

Man wird also unter Benutzung des unkorrigierten Längenmaßstabes stets zuviel messen, und zwar ist im Norden die Differenz $> 1\,\%$.

Nun hat aber die Karte noch folgende Eigentümlichkeit: Bei der Übernahme von Reymann-Oesfeld wurde festgestellt, daß der dazugehörende messingene Original-Transversalmaßstab nicht genau 1:200000, sondern 1:199029 geteilt, also mit einem Fehler von etwa $^1/_2\,\%$ behaftet war. So wurden denn die Maße der Blattränder 341,329 × 232,917 mm,

statt 339,672 × 231,789 „ ,

Differenz 1,657 und 1,1279 mm Kartenmaß,

entsprechend 0,3314 und 0,2255 km natürliches Maß.

Der ganze Fehler der nördlichsten Blätter erhöht sich somit von 0,7463 um 0,3314 auf 1,078 km 5,4 mm und der der südlichsten Blätter von 0,2443 um 0,3314 auf 0,576 km = 2,88 mm, was für topographische Karten immerhin ins Gewicht fällt.

Das gewählte Beispiel ist ein eklatanter Beweis für die Überlegenheit bei Gradabteilungskarten, wie solche z. B. die Blätter der topographischen Übersichtskarte von Deutschland 1:200000 sind. Während bei letzterer ein Fehler, abgesehen von dem in der Reproduktionsart enthaltenen, überhaupt nicht vorhanden ist, hat sich bei der in gleichem Maßstab gehaltenen oben behandelten „Spezialkarte“ für die nördlichsten und südlichsten Blätter doch ein theoretisch immerhin nicht unbeträchtlicher vorwiegend im Gradnetzentwurf beruhender Fehler ergeben.

IV. Zylinderprojektionen.

1. Allgemeines.

Die Zylinderprojektionen lassen sich als Grenzfall der konischen Entwürfe ansehen, insofern als der Kegel in einen Zylinder übergeht, wenn $n = 0$, mithin auch der Winkel an der Spitze gleich 0 wird, d. h., daß die Meridiane sich im Unendlichen schneiden, also parallel werden.

Die Projektionsart läßt sich auch dahin definieren, daß der Zylinder das Sphäroid in einem Großkreis berührt und daß die normal zur Berührungsebene stehenden Großkreisebenen, verlängert, den Zylindermantel als gerade parallele Linien schneiden. Es liegt dabei nahe, normalerweise von einem Zylinder auszugehen, der die Erde im Äquator berührt, so daß dieser als gerade Linie abgebildet wird. Für die Abbildung der Parallelkreise wird man leicht darauf kommen, sie dahin zu definieren, daß alle ihre Punkte gleichen Abstand vom Äquator haben sollen, so daß also auch die Parallelkreise als gerade Linien erscheinen. Man drückt daher auch nicht mehr die Parallelkreisabstände als Funktion der Poldistanz ϑ aus, sondern als Funktion der geographischen Breite, d. i. Äquatordistanz $\varphi = (90^0 - \vartheta^0)$, so daß dem Abstandsgesetz für die Parallelkreise folgende Form zu geben sein wird:

$$y = f(\varphi).$$

Nach welchem besonderen Gesetz die Parallelkreise nun auch auf dem Zylindermantel übertragen werden mögen, die Tatsache steht fest, sie müssen alle gleich groß abgebildet werden. Nun werden aber auf der Kugel die Parallelkreise, wenn man vom Äquator kommt, mit wechselnder Breite im Verhältnis des Kosinus der Breite kleiner. Wenn sie nun alle gleich groß abgebildet werden, so müssen die Verzerrungen in höheren Breiten recht erhebliche werden. Daher eignet sich die Zylinderprojektion in erster Linie für niedrige Breiten bzw. schmale Zonen.

Da alle Parallelkreise dahin definiert worden sind, daß sie gleichen Abstand vom Äquator haben, so müssen sie auch Linien gleicher Verzerrung sein. Die Indikatrixachsen werden also parallel den Meridianen und Parallelkreisen liegen. Läßt man

den Darstellungszylindermantel das Sphäroid nicht im Äquator berühren, sondern es schneiden, analog dem Schnittkegel, so wird man statt des längentreuen Gleichers zwei in gleicher Entfernung von ihm gelegene längentreue Breitenparallelen erhalten. Die letzteren sollten nach Äquatorabständen abgebildet werden. Je nachdem nun die Funktion für $f(\eta)$ gefaßt wird, lassen sich bestimmte Forderungen, wie mittabstandstreu, flächentreu usw., erfüllen, was hier um so größere Bedeutung hat, als der Zylinder, in welcher Lage er auch angewendet wird, in einer Beziehung den beiden anderen Abbildungsflächen überlegen ist, er erlaubt es, Abbildungen von fast der ganzen Erde herzustellen.

Bevor diese einzelnen Forderungen besprochen werden, sei noch einiges über die nichtnormale Zylinderprojektion gesagt.

Der transversale Zylinder wird die Erde stets in einem Meridian berühren. Dieser bildet den Grundkreis, der als gerade Linie dargestellt wird. Von ihm werden dann nach der gegebenen Funktion die Horizontalkreise des azimutalen Hilfsnetzes abgebildet. Die Hauptkreise werden ebenfalls analog den Meridianen abgebildet, so daß das Hilfsnetz genau so aussieht wie das Gradnetz bei normaler Lage.

Auf den Karten findet man aber das Hilfsnetz nicht vor, es ist also, wenn Messungen vorzunehmen sind, einzuzeichnen, was nicht schwer hält. Liegt ein schiefachsiger oder transversaler Schnittzylinder vor, so ist zunächst der Hauptkreis zu konstruieren, der ja im allgemeinen das Kartenblatt in zwei Hälften teilen wird; und dann ist gleichfalls so wie bei einem transversalen Entwurf weiter zu verfahren.

Zu den einzelnen Entwürfen übergehend, sei zunächst

2. die quadratische Plattkarte

behandelt. Sie stellt überhaupt den ältesten Gradnetzentwurf dar[1]. Man kann sie erhalten, indem man vom Gleicher auf den ihn umschließenden Kegelmantel alle Parallelkreise in demselben Abstand wie auf der Kugel aufträgt. Da nun, wenn man die Erde als Kugel betrachtet, auf dem Äquator ein Längen-

[1] Vgl. Tissot-Hammer, S. 88 ff.

grad so lang ist wie ein Breitengrad, so müssen die Gradfelder als gleich große Quadrate abgebildet werden. Die Karte verhält sich also analog der mittabstandstreuen Kegelprojektion mit längentreuen Meridianen und mit längentreuem Mittelparallel; denn auch hier werden ja die Meridiane längentreu abgebildet.

Das Gesetz für den Äquatorabstand y lautet also:

$$y = \text{arc } \varphi .$$

Hieraus kann man die Art der Verzerrung sofort herleiten. Da die Meridiane längentreu abgebildet werden, so ist die Verzerrung in Nord-Süd-Richtung (h) 0. Da die Parallelkreise in höheren Breiten vergrößert abgebildet werden, so muß die größere (also a-) Achse in Ost-West-Richtung liegen.

$$b = k \text{ wird also} = 1;$$

für a gilt nun folgendes Gesetz:

$$a = k = \sec \varphi;$$

sec φ ist ja in der Tat auch für jeden Wert von $\varphi > 1$.

Da k a, je mehr man polwärts schreitet, immer stärker wächst, so darf, wenn man nicht zu große Verzerrungen haben will, die abzubildende Zone nicht mehr als vielleicht 30°, φ also nicht größer als etwa 15° werden, wo a k 1,035 wird.

Diese Projektion erlaubt es, die gemessene Länge ziemlich genau auf ihren Urwert zu reduzieren, indem eben die Meridiane längentreu und die Breitenkreise Äquideformaten sind.

Zur Reduzierung gemessener Längen auf Urwerte erlauben die meisten Zylinderprojektionen eine graphische Methode. Es wird zu diesem Zweck ein besonderer Maßstab angewendet. Er enthält zunächst zehn parallele Linien, die, von unten anfangend, die Bezifferung von 0 –90° tragen. Von der einen Kante ist eine bestimmte Länge, beispielsweise 500 Seemeilen, auf jeder Linie (0°, 10° usw.) so aufgetragen, wie sie tatsächlich bei der Übertragung vom Globus auf die Karte vergrößert wird. Alle diese Punkte sind durch eine Kurve verbunden, die ein Parabelzweig ist, indem der 90. Parallelkreis, der Pol, ∞ vergrößert wird, die Kurve also schließlich dieser Geraden parallel

laufen muß. Jeder gute Atlas enthält Maßstäbe dieser Art, so daß von einer Reproduktion hier abgesehen werden kann.

Ein solcher Maßstab erlaubt ein sehr bequemes Arbeiten. Man projiziert die nichtnormale Orthodrome, bzw. bei mehrfach gekrümmten Linien das als gerade anzusehende Stückchen, bei der Plattkarte auf die Indikatrixachse a, die durch die Parallelkreise dargestellt wird. Dann mißt man die Länge der Projektion einmal auf der Linie, die die gleiche Bezifferung trägt wie der Mittelwert für die Zone, das andere Mal auf der unteren Kante, die die Bezifferung 0° trägt und den Äquatorialmaßstab darstellt. Nun bildet man die Differenz zwischen den abgelesenen Werten auf Äquatorialmaßstab und Maßstab für die betreffende Breite. Die Differenz dieser beiden Werte, mit dem Kosinus des Neigungswinkels multipliziert, gibt den „Fehler" an.

Ist ein Breitengrad zu messen, so kann der tatsächliche Wert auf der dem Breitengrad entsprechenden Linie gleich abgelesen werden.

Es kann nun gefordert werden, daß bei längentreuen Meridianen ($h = 1$) zwei Parallelkreise längentreu abgebildet werden sollen. Diese Projektion nennt man

3. die rechteckige Plattkarte.

Sie kann dahin definiert werden, daß der Zylinder die Kugel in den beiden längentreu abzubildenden Parallelkreisen schneidet. Alle anderen Parallelkreise erscheinen so lang wie die Schnittkreise. Da diese kleiner sein müssen als die Meridiane, müssen die Gradfelder als Rechtecke abgebildet werden, deren längere Seiten in der Nord-Süd-Richtung liegen.

Diese beiden längentreu abgebildeten Parallelkreise seien $+\varphi_1$ und $-\varphi_1$. Die Parallelen innerhalb der von $+\varphi_1$ und $-\varphi_1$ begrenzten Zone werden also eine Verkürzung erfahren, die anderen eine Verlängerung.

Die Länge von $\pm\varphi_1$ ist $2\pi r \cdot \cos\varphi_1$ oder $\text{arc } 360^\circ \cdot \cos\varphi_1$; da alle Parallelkreise gleich lang sind, werden sie alle die Länge von $\text{arc } 360^\circ \cdot \cos\varphi_1$ haben. Hieraus kann man unmittelbar die Verzerrungsgrößen ableiten. Es ist ($h = 1$)

$$k = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}.$$

Wenn nun z. B. der Parallel zwischen $\pm \varphi_1$ liegt, so ist $\cos \varphi > \cos \varphi_1$. Der Bruch $\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi}$ wird also < 1. Die Parallelkreise werden demnach innerhalb dieser Zone, wie es ja vorhin schon die Anschauung gezeigt hatte, verkleinert abgebildet. Liegt φ außerhalb $\pm \varphi_1$, so ist diesmal $\varphi < \varphi_1$, $\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi}$ wird also > 1. Die Parallelkreise werden vergrößert.

Zur Aufzeichnung des Breitenmaßstabes ist hiernach folgende Tabelle berechnet worden:

Schnittparallel der Kugel 50°.

Der Veränderungsfaktor beträgt bei			
90°	∞	48°	0,961
85°	7,400	46°	0,925
80°	3,704	44°	0,893
70°	1,880	42°	0,865
66°	1,583	40°	0,839
63°	1,440	37°	0,805
60°	1,286	34°	0,775
58°	1,213	30°	0,742
56°	1,150	25°	0,709
54°	1,093	20°	0,684
52°	1,044	10°	0,653
50°	1,000	0°	0,642

Die graphische Darstellung gibt Fig. 3.

Der Anblick dieser Zahlenreihe und der Figur lehrt, daß die Linearveränderungen besonders äquatorwärts vom längentreuen Parallel in sehr mäßigen Grenzen sich bewegen. Die

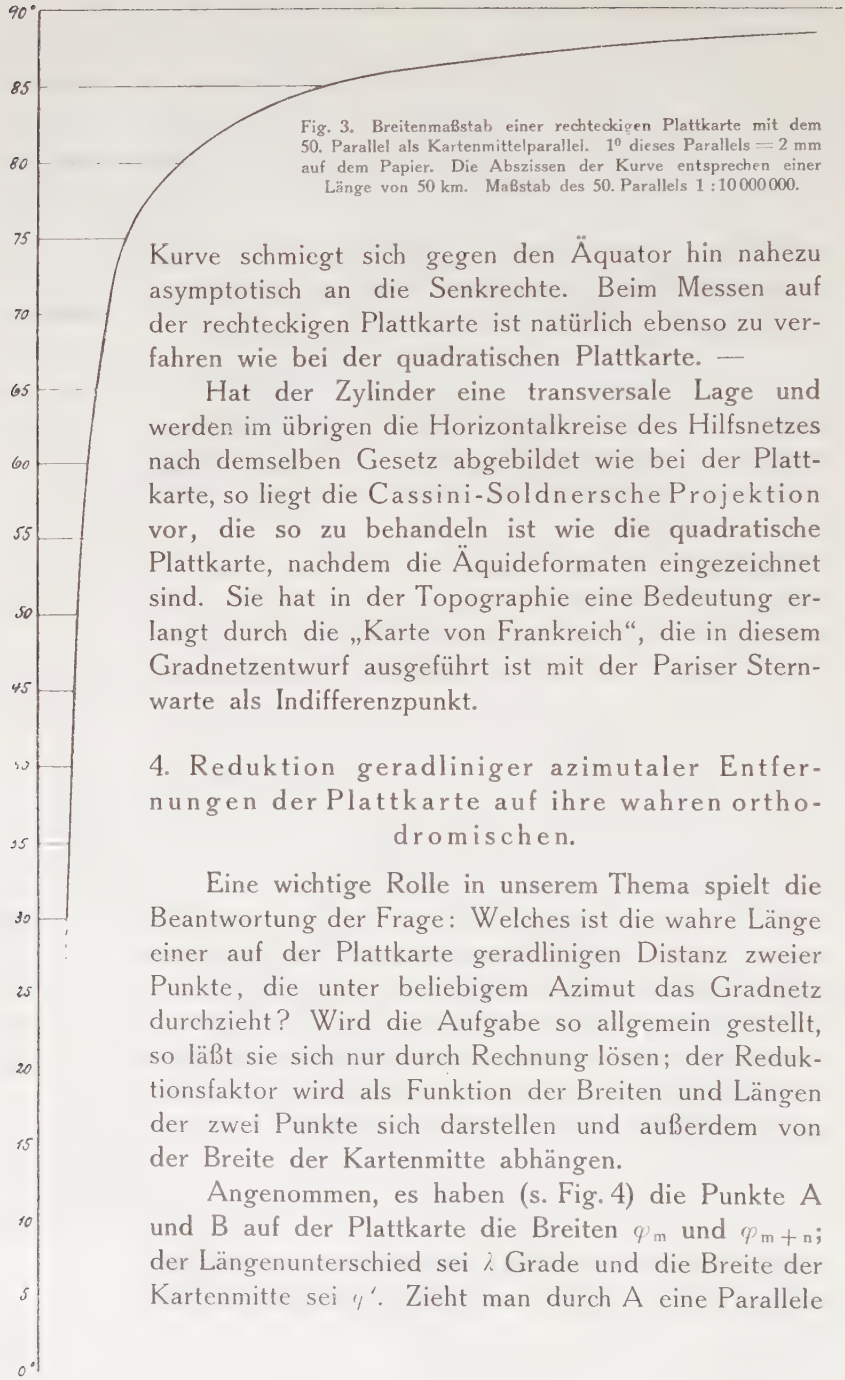


Fig. 3. Breitenmaßstab einer rechteckigen Plattkarte mit dem 50. Parallel als Kartenmittelparallel. 1° dieses Parallels = 2 mm auf dem Papier. Die Abszissen der Kurve entsprechen einer Länge von 50 km. Maßstab des 50. Parallels 1 : 10 000 000.

Kurve schmiegt sich gegen den Äquator hin nahezu asymptotisch an die Senkrechte. Beim Messen auf der rechteckigen Plattkarte ist natürlich ebenso zu verfahren wie bei der quadratischen Plattkarte. —

Hat der Zylinder eine transversale Lage und werden im übrigen die Horizontalkreise des Hilfsnetzes nach demselben Gesetz abgebildet wie bei der Plattkarte, so liegt die Cassini-Soldnersche Projektion vor, die so zu behandeln ist wie die quadratische Plattkarte, nachdem die Äquideformaten eingezeichnet sind. Sie hat in der Topographie eine Bedeutung erlangt durch die „Karte von Frankreich", die in diesem Gradnetzentwurf ausgeführt ist mit der Pariser Sternwarte als Indifferenzpunkt.

4. Reduktion geradliniger azimutaler Entfernungen der Plattkarte auf ihre wahren orthodromischen.

Eine wichtige Rolle in unserem Thema spielt die Beantwortung der Frage: Welches ist die wahre Länge einer auf der Plattkarte geradlinigen Distanz zweier Punkte, die unter beliebigem Azimut das Gradnetz durchzieht? Wird die Aufgabe so allgemein gestellt, so läßt sie sich nur durch Rechnung lösen; der Reduktionsfaktor wird als Funktion der Breiten und Längen der zwei Punkte sich darstellen und außerdem von der Breite der Kartenmitte abhängen.

Angenommen, es haben (s. Fig. 4) die Punkte A und B auf der Plattkarte die Breiten φ_m und φ_{m+n}; der Längenunterschied sei λ Grade und die Breite der Kartenmitte sei η'. Zieht man durch A eine Parallele

zum Parallel der Kartenmitte, so erhält man das bei C rechtwinklige ebene Dreieck A B C, worin A B = Z = der erwähnten geradlinigen Distanz ist. Sehen wir vom Verjüngungsverhältnis der Karte ab, so ist offenbar

$$A\,C = r \cdot \cos \varphi' \cdot \lambda,$$
$$B\,C = r \cdot (\varphi_{m+n} - \varphi_m) = r \cdot \mu.$$

Mithin

$$Z = r \cdot \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}. \qquad (I)$$

Dieser Ausdruck ist mit der orthodromischen Länge der beiden Orte auf der Kugel zu vergleichen. Hier errechnet sich ihre sphärische Distanz (s. Fig. 5) Z_1 aus dem Kugeldreieck A B N nach dem Kosinussatz:

$$\cos Z_1 = \sin \varphi_m \cdot \sin \varphi_{m+n} + \cos \varphi_m \cdot \cos \varphi_{m+n} \cdot \cos \lambda.$$

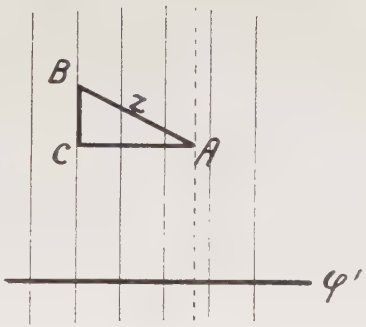


Fig. 4.

Um hieraus Z_1 explizite auszudrücken, ist die inverse (arcus cosinus) Funktion zu nehmen und zu schreiben

$$Z_1 = \text{arc cos}\,[\sin \varphi_m \cdot \sin \varphi_{m+n} + \cos \varphi_m \cdot \cos \varphi_{m+n} \cdot \cos \lambda].$$

Um die Gradzahl Z_1 in Linearmaß zu verwandeln, ist mit dem Kugelradius r zu multiplizieren, so daß sich die wahre orthodromische Länge der beiden Orte so darstellt:

$$r \cdot Z_1 = \zeta = r \cdot \text{arc cos}\,[\sin \varphi_m \cdot \sin \varphi_{m+n} + \cos \varphi_m \cdot \cos \varphi_{m+n} \cdot \cos \lambda]. \qquad (II)$$

Mithin ist

$$\frac{Z}{\zeta} = \frac{r \cdot \sqrt{\lambda^2 + (\varphi_{m+n} - \varphi_m)^2}}{r \cdot \text{arc cos}\,[\sin \varphi_m \cdot \sin \varphi_{m+n} + \cos \varphi_m \cdot \cos \varphi_{m+n} \cdot \cos \lambda]}$$

oder: Wahre Länge

$$\zeta = Z \cdot \frac{\text{arc} \cdot \cos\,[\sin \varphi_m \cdot \sin \varphi_{m+n} + \cos \varphi_m \cdot \cos \varphi_{m+n} \cdot \cos \lambda]}{\sqrt{\lambda^2 + (\varphi_{m+n} - \varphi_m)^2}} \qquad (III)^1$$

[1] Verfasser ist sich bewußt, daß diese komplizierte Formel nur theoretischen Wert haben kann; er hat in keinem Werke solche Reduktionsfaktoren ausgerechnet gefunden, was schon vermuten läßt, daß die Sache nicht einfach liegt.

Der bei Z stehende Faktor ist der gesuchte Reduktionsfaktor. Mit ihm ist Z zu multiplizieren, um es in wahre orthodrome Länge zu verwandeln.

Ist $\lambda = 0^0$, d. h. liegen die Orte A und B auf demselben Meridian, so vereinfacht sich der Reduktionsfaktor sofort; es ist dann

$$\zeta = Z \cdot \frac{\text{arc cos}\,[\cos(\varphi_{m+n} - \varphi_m)]}{(\varphi_{m+n} - \varphi_m)} \quad Z \text{ (Längentreue).} \quad \text{(IV)}$$

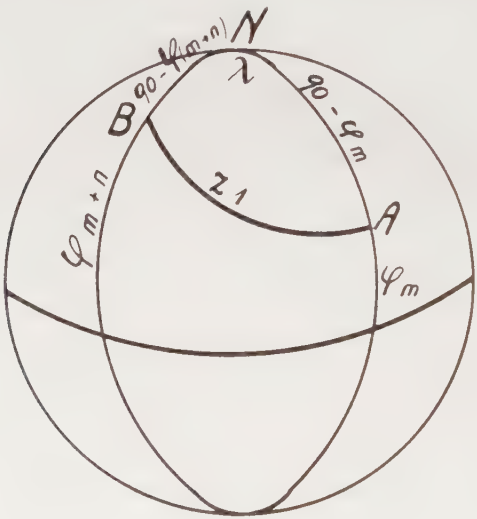


Fig. 5.

4. Flächentreue Zylinderprojektionen.

Lamberts flächentreue oder isozylindrische Projektion mit längentreuem Äquator, auf dem stereometrischen Lehrsatz beruhend, daß die Oberfläche einer Kugel gleich dem Mantel des Berührungszylinders ist und der Flächeninhalt einer Kugelzone gleich dem gleichhohen Mantelabschnitt des Berührungszylinders.

Da die Parallelkreise auf dem Berührungszylinder alle gleich groß sein müssen, in Wirklichkeit aber zum Pol hin immer kleiner werden, so müssen, wenn Flächentreue gewahrt werden soll, die Zonen zum Pol hin immer schmaler werden. Das Gesetz für die Äquatordistanz lautet:

$$y = \sin \varphi.$$

Für die Verzerrungen läßt sich zunächst ganz allgemein aus der Flächentreue folgen, daß

$$a > 1;\ b < 1$$

sein muß, und daß $a = \frac{1}{b}$ oder $b = \frac{1}{a}$ sein müssen. Auch ist es leicht zu sehen, wie a und b liegen müssen. Da die Parallelkreise vergrößert abgebildet werden, muß also die a-Achse mit ihnen identisch sein; b ist demnach mit dem verkleinert abgebildeten Meridian identisch. Die Verzerrungsgesetze[1] lauten:

$$a = k = \sec \varphi$$
$$b = h = \cos \varphi$$

Die Verzerrungen werden außerordentlich stark, sobald φ größere Werte annimmt. Ist $\varphi = 60^0$, so ist schon $a = 2{,}000$ und $b = 0{,}500$, also die Vergrößerung bzw. die Verkleinerung ist das Zweifache der ursprünglichen Länge. Ist $\varphi = 75^0$, so ist $a = 3{,}864$ und $b = 0{,}259$. Es ist also hier wenigstens sobald die Verzerrung das Doppelte übersteigt, die rechnerische Messung zu wählen. Wegen der so außerordentlich großen Winkelverzerrung und Linearveränderung eignet sich Lamberts Zylinderprojektion nicht zur Abbildung der ganzen Erde. Es ist aber erwünscht, von der ganzen Erde eine flächentreue Abbildung in Zylinderprojektion von möglichst geringer Winkelverzerrung und Linearveränderung zu besitzen.

Behrmann weist mit Recht darauf hin[2], daß an Stelle der so viel für Erdkarten angewandten Mercatorprojektion (s. später), sobald es sich um Karten handelt, worauf etwa die mittlere Regenhöhe, die mittlere Bevölkerungsdichte usw. dargestellt wird, überhaupt für statistische Zwecke, eine flächentreue Projektion treten sollte, die bei geringerer Verzerrung[3] es erlaubt, auf der Karte räumliche Vergleiche vorzunehmen. Er verkennt nicht die Vorzüge der anderen Zylinderprojektionen, kommt aber zu dem

[1] Vgl. Tissot-Hammer, S. 100.

[2] Petermanns Mitteilungen, 56. Jahrgang 1910, 2. Halbband, 3. Heft: „Dr. W. Behrmann, Die beste flächentreue Projektion der ganzen Erde", S. 141.

[3] Nach Tissot wäre die Behrmannsche Zylinderprojektion als „perigonal" für flächentreue Darstellung der ganzen Erde zu bezeichnen.

Ergebnis, daß die flächentreue Projektion auf dem Durchschnittszylinder im 30. Grad „die beste flächentreue Projektion der ganzen Erde“ ist, mit einer mittleren Maximalwinkelverzerrung von $2\omega = 27^0\,6'$.[1] Der Abstand der Parallelkreise vom Äquator ist

$$y = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0}.$$

Hieraus kann man leicht die Werte für h und k finden:

$$k = \cos \varphi_0 \cdot \sec \varphi$$
$$h = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0}.$$

Die Formel zeigt, daß h und k, wenn $\varphi = 30^0$ wird, $= 1$ sein müssen, da $\varphi_0 = 30^0$ war. Es tritt bei dieser Entwurfsart ein Wechsel von a und b ein, was leicht einzusehen ist. Man hat es mit einer flächentreuen Projektion zu tun, wo der 30. Parallel längentreu abgebildet werden muß. Infolgedessen muß der Äquator sowie jeder Parallel, der zwischen $\pm \varphi_0$ liegt, verkürzt erscheinen. Um nun Flächentreue zu wahren, müssen die Meridiane verlängert abgebildet werden.

a liegt also innerhalb der von den Parallelkreisen $\pm 30^0$ gebildeten Zone in Richtung der Meridiane, b parallel den Parallelkreisen. Auf dem 30. Grad ist, wie wir vorher gesehen hatten, $h = k = 1$. Über den 30. Grad hinaus werden die Parallelkreise vergrößert und demnach die Meridiane verkleinert abgebildet, so daß also hier a parallel den Parallelkreisen und b parallel den Meridianen liegt.

Wie Verfasser durch Einzeichnung einer Orthodrome von Cap Lizard nach La Guayra in die dem Behrmannschen Aufsatz beigegebene Karte gefunden hat, wird die Orthodrome als eine stark nach Norden gekrümmte Kurve abgebildet, dagegen wird die Loxodrome nur als schwach gekrümmte Kurve abgebildet.

[1] Für die Halbkugel würde natürlich dieselbe Maximalverzerrung eintreten. Immerhin ist diese noch erheblich geringer als bei Darstellung der Halbkugel nach Lamberts flächentreuer Azimutalprojektion, die Zöppritz-Bludau (I 154) als die beste flächentreue Darstellung der Halbkugel bezeichnet und dafür nach Tissot als größte Winkelverzerrung $38^0\,57'$ angibt.

Abgesehen von der Definition in der Einleitung wurde bisher, wenn von der Entfernung zweier Orte die Rede war, nur mit der orthodromischen Verbindung dieser Punkte gerechnet; nun ist es aber eine häufige Aufgabe, die loxodromische Entfernung zu bestimmen. Von Bedeutung, wenn auch jetzt von geringerer als zur Zeit der Segelschiffahrt, ist diese Aufgabe für den Nautiker, der die Länge des zurückgelegten Weges eines immer unter gleichem Kurs segelnden Schiffes wissen will. Die Behandlung dieser Frage wurde vorläufig unterlassen, weil für den Verlauf der loxodromen Kurve und für ihre Messung nur die winkeltreue Zylinderprojektion, nach ihrem Erfinder kurz

5. Mercatorprojektion

genannt, in Betracht kommt. Die Mercatorprojektion ist die einzige Entwurfsart, die die Loxodrome geradlinig abbildet. Breusing geht als Nautiker sogar so weit, sie als die wichtigste Karte zu bezeichnen[1]. Der Seemann nennt sie Karte nach vergrößerter Breite. Dieser Name charakterisiert gleichzeitig auch ihr Aussehen sehr gut. Es werden nämlich die durch die Parallelkreise abgeschnittenen Längengrade in demselben Sinne vergrößert wie die Breitenkreise, die den Meridiangrad abschneiden, infolge der parallelen Meridiane vergrößert werden müssen. Die Gradfelder sind infolgedessen denen auf der Kugel ähnlich, und die Länder, Seen usw. erhalten also stets eine der wirklichen Fläche ähnliche Form; allerdings ändert sich das Maßstabsverhältnis von Parallelkreis zu Parallelkreis. Da die Gradfelder denen auf der Kugel ähnlich sind, die Verzerrung also nach allen Richtungen gleich ist ($a = b$), so ist der Entwurf winkeltreu.

Die Gleichung für den Äquatorabstand y eines beliebigen Parallels φ lautet folgendermaßen:

$$y = \log \text{nat tang} \left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = 2{,}3026 \cdot \log \text{tang} \left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right),$$

d. i. das Integral der Sekante.

[1] Breusing, S. 31.

Die eingehende Begründung mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik findet sich bei N. Herz, Lehrbuch der Landkartenprojektionen, Leipzig 1885, S. 116 ff. Für elementare Entwicklung vgl. H. Wagner, Lehrbuch 1908, S. 208, Fußnote.

Da die Längen in demselben Maße vergrößert erscheinen wie die Breiten und diese auf der Karte mit

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$$

vergrößert erscheinen, so muß

$$a = b = \sec \varphi \text{ sein.}$$

Da $\sec \varphi$ stets > 1 ist, so haben wir es nur mit einer (nach allen Richtungen gleichen) Vergrößerung zu tun. Da $\sec 0^0 = 1$ ist, so ist der Äquator längentreu abgebildet. Man spricht daher bei der Mercatorkarte von einem Äquatorial-Maßstab.

Gestalt der Orthodrome und ihr Verhältnis zur Loxodrome.

Trägt man in die Mercatorkarte zwischen zwei Punkten von verschiedener Breite sowohl die Orthodrome wie die Loxodrome ein, so zeigt sich,

1. daß die Loxodrome eine gerade Linie bildet, was schon erwähnt war,

2. daß die Orthodrome eine Kurve[1] bildet, deren konkave Seite stets dem Äquator zugekehrt ist und deren Krümmung um so stärker wird, je näher die beiden Endpunkte den Polen sind.

Auch der Streckenunterschied zwischen Orthodrome und Loxodrome wächst mit zunehmender geographischer Breite der Endpunkte. Aus dem schon über die Konkavität Gesagten ergibt sich, daß die Kurve der Orthodrome in ihrem Schnittpunkt mit dem Äquator die Konkavität wechselt, also dort eine Flexur, einen Wendepunkt hat. Sie wird S-förmig, und ihr Schnittpunkt

[1] Diese Kurve ist keineswegs, wie man aus der Winkeltreue des Gradnetzentwurfes bei flüchtiger Überlegung leicht folgern könnte, ein Kreis. Die auf den Zylindermantel projizierten Orthodromen erscheinen vielmehr sowohl bei den eigentlichen Plattkarten wie bei der Mercatorkarte als transzendente Kurven. Vgl. Anlage 4.

mit dem Äquator fällt zusammen mit dem Schnittpunkt der Loxodrome mit dem Äquator (s. Fig. 6). Man hat hier also das irreführende Bild, daß die Loxodrome, die in Wirklichkeit stets länger ist als die Orthodrome, als Sehne erscheint, die Orthodrome aber als zugehöriger Bogen, während für das Auge die

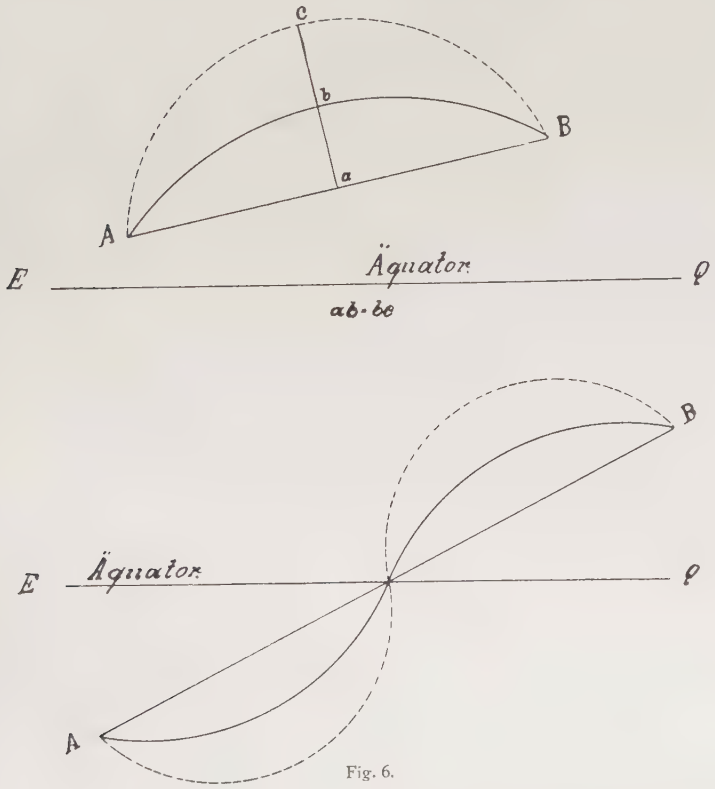


Fig. 6.

Sehne doch stets kürzer sein muß als der Bogen. Zieht man Linien zwischen den Endpunkten A und B, die im Bilde zwischen Loxodrome und Orthodrome verlaufen, so ist die Länge dieser Linien stets $>$ Orthodrome und $<$ Loxodrome. Kommt es nicht darauf an, die Richtung der Loxodrome, sondern ihre Länge im Vergleich zur Länge der Orthodrome bildlich darzustellen, so kann man dies (nach dem Lehrbuch der Navigation, herausgegeben vom Reichsmarineamt, Bd. 1, Berlin 1901) annäherungs-

weise tun, indem man den größten Abstand zwischen Loxodrome und Hauptbogen (die Pfeilhöhe) nach dem Pol hin nochmals abträgt und durch diesen Punkt und die beiden Endpunkte freihändig eine einem Kreisbogen sich nähernde Kurve legt. Alle Verbindungslinien zwischen den Endpunkten, die zwischen dieser Hilfskurve und der Orthodrome liegen, sind dann immer noch kürzer als die Loxodrome. Die Kenntnis dieser Verhältnisse ist kartometrisch von Wichtigkeit, da man sie sich lediglich aus der Anschauung heraus nicht ohne weiteres vergegenwärtigen kann. In der Navigation spielen diese Verhältnisse eine große Rolle. Den am meisten polwärts gelegenen Punkt des Hauptbogens nennt man seinen Scheitel. Die Lage dieses Scheitels ist in der Nautik von Wichtigkeit, da er den Ort der höchsten Breite angibt, was für den Kurs (Eisverhältnisse, Winde, Strömungen) unter Umständen entscheidend sein kann. Im Scheitel selbst ist natürlich der Kurs stets ostwest bzw. westost gerichtet, da die Tangente des Scheitels parallel zum Äquator geht.

Anlage 5 enthält einige Gegenüberstellungen von loxodromischen und orthodromischen Entfernungen.

Airys Näherungsmethode zur Einzeichnung der Orthodrome.

Zu erwähnen ist hierzu eine von Airy gegebene Näherungsmethode, die ohne Rechnung eine schnelle und bequeme Einzeichnung des Hauptbogens zwischen zwei Orten in die Mercatorerdkarte gestattet. Für dieses Verfahren, bei dem man sich der in Anlage 6 wiedergegebenen, dem genannten Lehrbuch der Navigation entnommenen Hilfstabelle bedient, sind folgende Regeln aufgestellt:

1. Man verbinde die beiden Orte, wenn sie auf gleichnamiger Breite liegen, in der Mercatorerdkarte durch eine gerade Linie, halbiere diese Linie und errichte im Mittelpunkt nach der Äquatorseite hin eine Senkrechte, die eventuell bis über den Äquator hinaus zu verlängern ist.

2. Mit der Mittelbreite beider Orte entnehme man aus der Hilfstabelle den korrespondierenden Parallel.

3. Der Schnittpunkt dieses Parallels mit der Senkrechten ist der Mittelpunkt des Kreises, den man über der Loxodrome als Sehne durch beide Orte legt.

Dieser Kreis entspricht sehr angenähert der Kurve des Hauptbogens.

4. Liegen die beiden Orte auf verschiedenen Seiten des Äquators, so ziehe man ebenfalls die Loxodrome und konstruiere nun für jeden Abschnitt nördlich und südlich vom Äquator den zugehörigen Hauptbogen.

Kirbys Instrument für Orthodromendarstellungen.

Der amerikanische Kapitän St. R. Kirby[1] hat ein Instrument erdacht, das die Lösung der Aufgaben der größten Kreisrechnung auf mechanischem Wege bezweckt und Kirbys Circumnavigator, auch Great circle cours-indicator[2] heißt. Ob und wo dieses Instrument praktisch eingeführt ist, konnte nicht in Erfahrung gebracht werden.

Berechnung der Länge der Loxodrome.

So leicht die Richtung der Loxodrome auf der Mercatorkarte zu bestimmen ist, so schwierig ihre wahre Länge, will man sich nicht mit Annäherungswerten begnügen und will man nicht auf die zum Teil komplizierten Formeln der loxodromischen Trigonometrie zurückgreifen.

Aus der mit dem Maßstab der wachsenden Breiten- und Randeinteilung versehenen Mercatorkarte ist die Länge der Loxodrome richtig nur für die Grenzfälle abzumessen, nämlich, wenn sie mit Meridianen (also gleichzeitig Orthodrome) oder mit Breitenparallelen zusammenfällt. In diesen beiden Fällen ist sie aber auch nach dem weiter oben Gesagten aus den bekannten Dimensionen des Erdphäroids leicht zu berechnen. Die Schwierigkeit fängt erst an, wenn es sich um die Längenausmessung einer beliebigen Loxodrome handelt. Zöppritz-Bludau hilft sich

---

[1] nicht zu verwechseln mit dem Chefingenieur der Kriegsmarine der Vereinigten Staaten A. Kirby.

[2] amerikanische Patentschrift Nr. 615857 vom 13. Dezember 1898. — Verfasser verdankt diese Angaben einer Mitteilung des Professors Alger von der Marineakademie (U. S. Naval Institute) in Annapolis-Maryland.

mit zwei Zeilen mehr einfach als richtig über die Situation hinweg, indem er sagt[1]: „Hat man eine Strecke zu messen, deren Endpunkte auf verschiedenen Breiten liegen, so benutzt man den zum mittleren Parallel gehörenden Maßstab.“ Die große Ungenauigkeit dieses Verfahrens springt sofort in die Augen, wenn man sich die Endpunkte einer zu messenden Loxodrome gleich weit nördlich und südlich vom Äquator denkt, der in diesem Falle den Mittelparallel darstellt. Man würde die loxodromische Entfernung dann stets zu groß messen. Auch die Verfasser der mehrfach zitierten Kartenkunde begnügen sich mit diesem Verfahren, fügen allerdings mit den meisten anderen Autoren hinzu, daß, wenn der Breitenunterschied der Endpunkte zu groß, man die zu messende Linie zonenweise teilen muß. Sie beschreiben im übrigen das Meßverfahren wie folgt[2]: „Um die Distanz zweier Punkte zu messen, nimmt man ihre Entfernung nach der Karte in den Zirkel, trägt sie von der Mittelbreite beider Punkte an der wachsenden Breitenskala halb nach oben, halb nach unten auf und liest die Anzahl der zwischen die Zirkelspitzen fallenden Bogenminuten (= Seemeilen) dieser Skala ab[3].

Es wird danach also an dem am Kartenrand der Mercatorkarte eingezeichneten Meridianmaßstab gemessen, wie er auf Seekarten oder nautischen Karten stets vorhanden ist. Fiorini[4] gar verzichtet ganz auf Messung der Loxodrome auf den Karten und begnügt sich damit, sie mit Hilfe der loxodromischen Trigonometrie zu errechnen und im übrigen auf die Anwendung des Log zu verweisen, was (man verzeihe das unbeabsichtigte Wortspiel) nicht recht logisch ist. Denn dies Verfahren hat doch nur Sinn, wenn der Seemann die durchfahrene Strecke in die Karte eintragen, nicht aber, wenn er die zu durchfahrende Strecke vorher aus der Karte zur Längenberechnung herauslesen will.

Vom kartometrischen Standpunkt aus hat die Mercatorprojektion für die Loxodrome dieselbe Bedeutung wie die schon

[1] Lehrbuch der Kartenentwurfslehre 1899, I 144.

[2] Kartenkunde 1910, S. 82.

[3] Eine eingehende Auseinandersetzung solcher Approximationsverfahren findet man bei N. Herz a. a. O. S. 120, Fig. 41.

[4] Misure lineari S. 14.

behandelte gnomonische Azimutalprojektion für die Orthodrome. Sie dient in vorzüglicher Weise als Hilfsnetz, um graphisch ohne Rechnung die Loxodrome in jedes beliebige Gradnetz einzutragen.

6. Unechte Zylinderprojektionen.

a) Sanson-Flamsteedsche,

b) Mollweidesche Projektion.

Ihre Ähnlichkeit mit den echten Zylinderprojektionen besteht darin, daß die Parallelkreise geradlinig abgebildet werden. Die Meridiane sind aber Kurven höherer Ordnung.

a) Bei der Sanson-Flamsteedschen Projektion werden die Parallelkreise genau in demselben Abstand vom Äquator wie bei der Plattkarte gezeichnet. Dann wird der Mittelmeridian gezogen, der also längentreu sein muß. Von diesem aus werden nun die Parallelkreise längentreu eingeteilt. Diese Teilpunkte werden endlich durch Kurven verbunden. Auf der Karte erscheinen also Parallelkreise und Mittelmeridian längentreu. Die übrigen Meridiane werden alle vergrößert wiedergegeben. Sie ist mithin ganz analog der Bonneschen unechten Kegelprojektion gebildet; und in der Tat ist unsere Projektion nur ein Grenzfall der Bonneschen, wenn nämlich die Konstante $n = 0$ wird. Man bekommt dann

$$\begin{aligned} y &= \text{arc } \varphi \\ x &= \text{arc } \lambda \cdot \cos \varphi \\ k &= 1 \\ h &= \sec \Theta, \end{aligned} \qquad [1]$$

wo Θ sich leicht aus

$$\text{tang } \Theta = \text{arc } \lambda \cdot \sin \varphi$$

berechnen läßt. (Eine diesbezügliche Tabelle findet sich bei N. Herz, S. 304.)

b) Bei der Mollweideschen Projektion werden die Parallelkreise zwar gleichmäßig, jedoch nicht längentreu von dem nichtlängentreuen Mittelmeridian so eingeteilt, daß der Grenzmeridian, der vom Schnittpunkt des Äquators mit dem Mittelmeridian 90° entfernt ist, als Kreis abgebildet wird.

[1] Tissot-Hammer, S. 112.

Für sie ist

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \cos\varphi' \cdot \text{arc}\,\lambda$$

$$x = \sqrt{2} \cdot \sin\varphi'$$

$$k = \frac{2}{\pi}\sqrt{2} \cdot \sec\varphi \cdot \cos\varphi'.$$

Beide Projektionen sind flächentreu, doch sind die Parallelkreise nicht mehr Äquideformaten.

Während nun infolge der Längentreue des Mittelmeridians und sämlicher Breitenkreise bei Sanson-Flamsteeds Entwurf die Möglichkeit, nach dem angegebenen Maßstabe Längenmessungen auszuführen, wenigstens in beschränktem Maße vorhanden ist, ist dies bei (b) Mollweide nicht der Fall. Man bedarf also besonderer Breitenmaßstäbe, ähnlich wie bei den echten Zylinderentwürfen, aber mit dem Unterschied, daß deren Ermittlung nicht mehr auf einfache Weise möglich ist. Bei Mollweide kommt noch etwas anderes — nicht gerade Fehlerhaftes, aber doch Unmethodisches — hinzu. Abweichend von allen anderen Entwürfen geht der seinige, wie oben entwickelt, von der Flächengleichheit im ganzen aus, während jene, einschließlich der Globularprojektion, von der Längeneinheit ausgehen und die flächentreuen unter ihnen zur allgemeinen Flächengleichheit erst gelangt sind über den Weg des Vergleichs der kleinsten Flächen. Verfasser betrachtet daher Mollweides Entwurf als einen recht unglücklichen — sobald es sich um Längenmessungen handelt, von denen ja hier nur die Rede ist. Es fehlen ihm gleichermaßen längentreue Linien und einfach definierbare Äquideformaten.

Kritik[1] des Linearmaßstabes für die Mollweidesche Projektion.

Dieser Umstand hat zu eigentümlichen Konsequenzen geführt. So hat H. Wagner für die flächentreue Mollweidesche Projektion in Sydow-Wagners Schulatlas 1910 auf Blatt 10 einen „mittleren“ Maßstab, nämlich 1:140000000, angegeben,

[1] angeregt durch eine mündliche Besprechung mit Dr. A. Wolkenhauer.

der als Linearmaßstab auf keine Linie des Kartenbildes anwendbar ist. Wagner dividiert nämlich den Äquatorradius durch die Verjüngungszahl (140000000) gerade wie bei längentreuer Darstellung des Äquators. Dieser neue Radius ist derjenige eines Globus, der jetzt flächentreu in die Ebene abgebildet werden soll. Er beträgt

$$\frac{6370000}{140000000}\ \text{m} = 45{,}5\ \text{mm}.$$

Der Radius[1] eines der beiden Planigloben muß dann

$$= r \cdot \sqrt{2} = 45{,}5 \cdot \sqrt{2} = 64{,}3\ \text{mm}$$

sein, wie dies auf der betreffenden Karte der Fall ist, statt $\frac{\pi}{2} \cdot 45{,}5 = 71{,}5$ bei längentreuer Darstellung des Äquators, wie z. B. bei der auf demselben Atlasblatt dargestellten Mercatorprojektion.

Nimmt man den Radius mit 1 an und bezeichnet man das Verjüngungsverhältnis mit $\frac{1}{v}$, so ist bei Mollweide-Wagner der halbe Äquator $\frac{2\sqrt{2}}{v}$ statt $\frac{\pi}{v}$ bei längentreu dargestelltem Äquator. Die Äquatore verhalten sich also wie

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = \frac{2{,}8284}{3{,}1416} = \frac{1}{1{,}11073} = 0{,}90031.$$

Im vorliegenden Falle würde also z. B. der Linearmaßstab des Äquators nicht 1 : 140000000, sondern 1 : (140000000 × 1,11073) = 1 : 155502000 sein.

Sydow-Wagners Schulatlas enthält auf dem angeführten Blatt 10 die Anmerkung „Mittlerer Maßstab der gleiche (1 : 140000000) wie bei der Karte in Mercators Projektion entsprechend einem Globus von $\frac{6370000}{140000000}$ m = 45,5 mm Halbmesser". Er legt also als Längeneinheit den Globushalbmesser

[1] Halbkugelbild = Erdhalbkugelfläche.

$\varrho^2 \cdot \pi = 2r^2\pi$; also $\varrho^2 = 2r^2$ und $\varrho = r\sqrt{2}$.

zugrunde[1]. Dies entspricht den Ausführungen in Wagners Lehrbuch[2] nur teilweise, denn dort heißt es zwar, daß „die Wahl des Maßstabes stets von der Verkleinerung der natürlichen Länge einer Liniengröße ausgeht, wie z. B. des Erdradius", andererseits wird diese Bemerkung eingeschränkt dadurch, daß vorausgesetzt ist, daß man eine Längengröße wählt, „welche man längentreu in der Karte wiederzugeben gedenkt". Nun ist aber in Mollweides Gradnetzentwurf für den angegebenen Maßstab von 1:140000000 keine Linie längentreu dargestellt, auch nicht der Mittelmeridian und nicht der Äquator. Es heißt auch sowohl bei Wagner an derselben Stelle wie bei Zöppritz-Bludau[3], daß sich der Kartenmaßstab stets auf die Länge (auf die linearen Elemente[4]), nicht (nie[5]) auf die Fläche bezieht. Auch hinsichtlich des Ausdruckes „mittlerer Maßstab der Karte" steht die zitierte Anmerkung in Sydow-Wagners Schulatlas nicht in Einklang mit Wagners Definition in seinem Lehrbuch[1]. Es heißt daselbst: „Bei Projektionen, welche wenigstens den Äquator oder den Mittelmeridian noch geradlinig und längentreu abbilden, spricht man vom Maßstab im Äquator (z. B. bei der Mercatorprojektion) oder vom Maßstab im Mittelmeridian; bei den übrigen vom mittleren Maßstab der Karte, welchen man einer Gradlinie entnimmt, die im ganzen längentreu abgebildet ist". Dies trifft aber für Mollweides Gradnetzentwurf nicht zu, da er, wie gesagt, keine im ganzen längentreu abgebildete Gradlinie enthält, die im angeführten Falle dem Maßstabe 1:140000000 entspricht.

Berechnung und Darstellung des Breitenmaßstabes der Mollweideschen Projektion.

Zur Berechnung eines die Zone auf der Karte abschließenden Parallels aus dem die Kugelzone in der Breite φ begrenzenden Kleinkreise dient bekanntlich die transzendente Gleichung

$$2\varphi' + \sin 2\varphi' = \pi \cdot \sin \varphi. \qquad \text{(I)}$$

[1] Vgl. auch Tissot-Hammer, S. 26: „Als Längeneinheit dient der Halbmesser des Äquators."

[2] S. 198, Abs. 1.

[3] I. 28, Kap. 6.

[4] S. 199, Abs. 5.

Hieraus sieht man, daß der Breite φ auf der Kugel eine Breite φ' auf der Karte entspricht, die keineswegs $= \varphi$ ist. Es werden sich deshalb auch zwei entsprechende Parallelkreisradien auf der Kugel und Karte durchaus voneinander unterscheiden. Der erstere sei

$$z = \cos\varphi, \qquad (r = 1)$$

der andere $z' = \cos\varphi'$,

so daß $z - z' = \cos\varphi - \cos\varphi'$

die Abweichung von der Längentreue darstellt. Man kann nach dem Maximum der Längenabweichung fragen und den Winkel φ' bestimmen, wo der Kartenparallel den entsprechenden Kugelparallel am meisten an Länge übertrifft. Die Minima sind, wie man aus der Gleichung (I) sieht, bei $\varphi' = 0^0$ und $\varphi' = 90^0$. Bei diesen Werten ist auch $\varphi = 0$, bzw. $= 90^0$ und $z - z' = 0$. Zwischen $\varphi' = 0$ und $\varphi' = 90^0$ muß also ein Maximum liegen. Wir stellen die Abweichung

$$z - z' = \cos\varphi - \cos\varphi'$$

als Funktion von φ' dar und differenzieren dann nach φ'. Aus (I) folgt zunächst:

$$\sin^2\varphi = \left(\frac{2\varphi' + \sin 2\varphi'}{\pi}\right)^2,$$

also

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{2\varphi' + \sin 2\varphi'}{\pi}\right)^2},$$

mithin $$z - z' = \sqrt{1 - \left(\frac{2\varphi' + \sin 2\varphi'}{\pi}\right)^2} - \cos\varphi'.$$

Die Differenziation nach φ' ergibt:

$$\frac{d(z - z')}{d\varphi'} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2(2\varphi' + \sin 2\varphi') \cdot (2 + 2\cos 2\varphi')}{2\sqrt{1 - \left(\frac{2\varphi' + \sin 2\varphi'}{\pi}\right)^2}} + \sin\varphi',$$

$$= -\frac{2(2\varphi' + \sin 2\varphi') \cdot (1 + \cos 2\varphi')}{\pi\sqrt{\pi^2 - (2\varphi' + \sin 2\varphi')^2}} + \sin\varphi'.$$

Der Ausdruck rechter Hand ist für das Maximum $= 0$ zu setzen. Beachtet man noch, daß $1 + \cos 2\varphi' = 2\cos^2\varphi'$ ist, so erhält man leicht die transzendente Gleichung

$$\pi \cdot \sin \varphi' \cdot \sqrt{(\pi + 2\varphi' + \sin 2\varphi') \cdot (\pi - 2\varphi' - \sin 2\varphi')} = 4\,(2\varphi' + \sin 2\varphi') \cdot \cos^2 \varphi'. \qquad \text{(II)}$$

Sie wird noch nicht befriedigt durch $\varphi' = \frac{\pi}{3}$ d. h. $\varphi' = 60^0$.

Es hat aber N. Herz in seinem Lehrbuch der Landkartenprojektionen eine Tafel[1] berechnet, wo zu sämtlichen Graden von φ die zugehörigen Werte φ' mit dem jeweiligen Sinus- und Kosinuswert von φ' angegeben sind. Ist z. B. $\varphi = 72^0$, so findet man $\varphi' = 61^0\,39'\,9''$, und die Differenz $\cos \varphi' - \cos \varphi$ wird: $0{,}47482 - 0{,}30902 = 0{,}16580$. Zu $\varphi = 71^0$ gehört $\varphi' = 60^0\,35'\,3''$, die entsprechende Differenz ist $= 0{,}16557$. Zu $\varphi = 73^0$ endlich gehört $\varphi' = 62^0\,44'\,16''$, und die Differenz beträgt 0,16569. Übersichtlicher dargestellt, ist die Sachlage um das Maximum herum so:

φ	φ'	cos φ	cos φ'	Differenz
71°	60° 35′ 3″	0,32557	0,49114	0,16557
72°	61° 39′ 9″	0,30902	0,47482	0,16580
73°	62° 44′ 16″	0,29237	0,45806	0,16569

Das absolute Maximum der Längenabweichung liegt also auf der Karte zwischen dem 61. und 62. Grad; auf der Kugel entspricht dem ein Parallel zwischen 72 und 73 Grad.

Zur Aufzeichnung des Breitenmaßstabes für die Mollweidesche Projektion, dem zum Vergleich die längentreuen Parallelen in ihren Kosinuswerten beigegeben werden, diente nebenstehende Tabelle.

Aus der Tabelle geht hervor, daß sich die relativen Unterschiede (Spalte VI) wesentlich anders als die absoluten (Spalte V) gestalten, indem der Verzerrungsfaktor auch über 72° - 73° hinaus noch weiter abnimmt, der Unterschied zwischen cos φ und cos φ' also wächst, und zwar sehr schnell.

Einen Breitenmaßstab für Mollweides Projektion im Vergleich mit dem Verlauf eines solchen für längentreue Parallelkreise (Kosinuskurve) gibt Fig. 7.

[1] a. a. O., S. 309.

I	II	III	IV	V	VI
φ	φ'	cos φ	cos φ'	Differenz $\cos\varphi' - \cos\varphi$	Quotient $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}$ = Verzerrungsfaktor
5°	3° 55′ 41″	0,99619	0,99765	0,00146	0,998537
10°	7° 51′ 49″	0,98481	0,99060	0,00579	0,994155
15°	11° 48′ 45″	0,96593	0,97882	0,01289	0,986831
20°	15° 47′ 3″	0,93969	0,96229	0,02260	0,976514
25°	19° 47′ 10″	0,90631	0,94096	0,03465	0,963176
30°	23° 49′ 36″	0,86603	0,91477	0,04874	0,946719
35°	27° 55′ 5″	0,81915	0,88362	0,06447	0,927039
40°	32° 4′ 17″	0,76604	0,84739	0,08135	0,903999
45°	36° 18′ 8″	0,70711	0,80591	0,09880	0,877406
50°	40° 37′ 45″	0,64279	0,75894	0,11615	0,846958
55°	45° 4′ 34″	0,57358	0,70617	0,13259	0,812241
60°	49° 40′ 31″	0,50000	0,64712	0,14712	0,772654
65°	54° 28′ 17″	0,42262	0,58111	0,15849	0,727263
70°	59° 31′ 54″	0,34202	0,50706	**0,16504**	0,674516
75°	64° 57′ 58″	0,25882	0,42316	0,16234	0,611636
80°	70° 58′ 42″	0,17365	0,32592	0,15227	0,532800
85°	78° 3′ 46″	0,08716	0,20684	0,11968	0,421389
90°	90° 0′ 0″	0,00000	0,00000	0,00000	unbestimmt

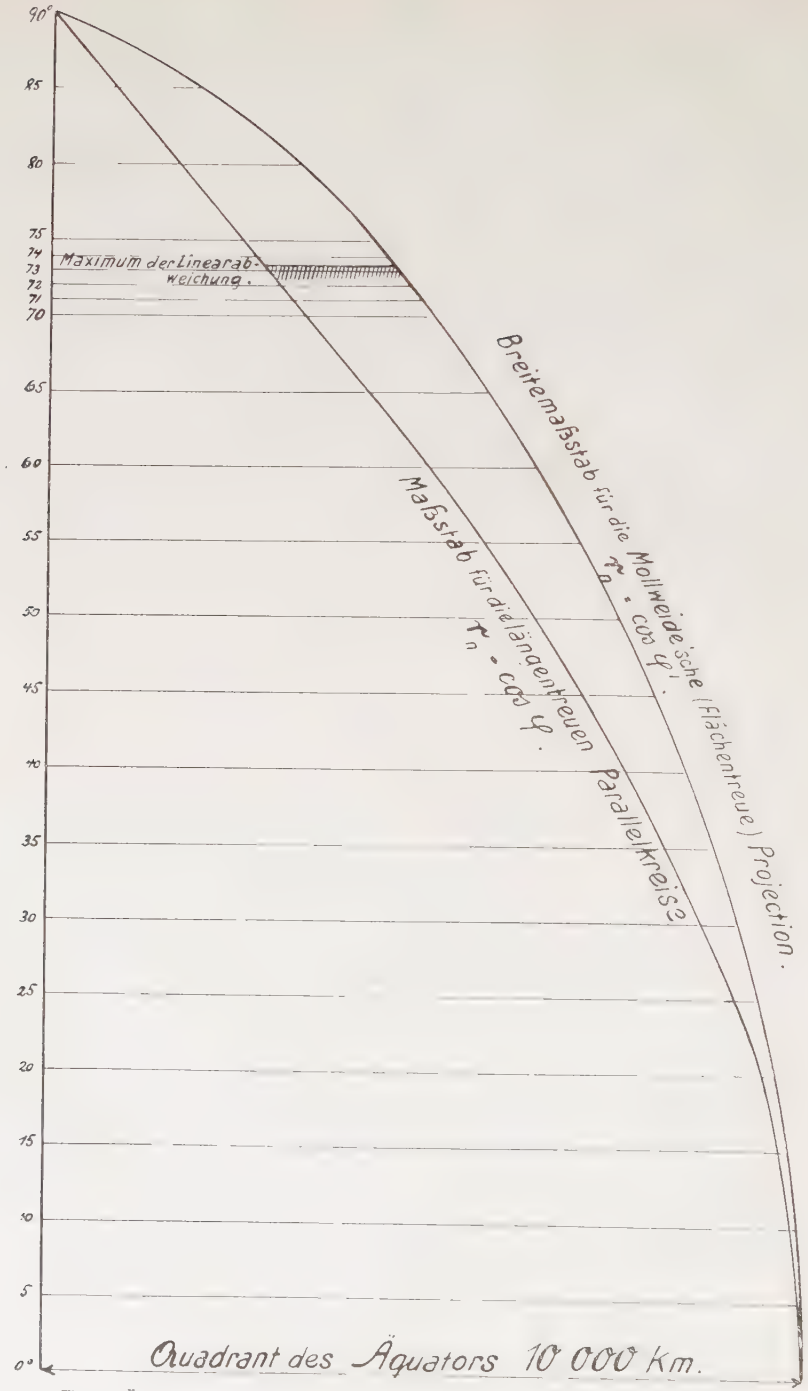


Fig. 7. Äquatorialmaßstab 1 : 100 000 000, entsprechend einem mittleren Linearmaßstab von 1 : 90 031 000.

Linearveränderung für beliebiges Azimut.

Bei der Besprechung des Einflusses des Gradnetzentwurfes sowohl im allgemeinen (S. 30) wie bei den einzelnen Projektionsarten sind bisher nur die Linearveränderungen ausgedrückt durch den Längenmodul oder -verzerrungsfaktor in den Hauptrichtungen — für normal konstruierte Gradnetzentwürfe also in den Meridianen und Breitenparallelen — behandelt worden, mithin einem Azimut α von 0° oder 90° entsprechend.

Auf Grund weiterer Überlegungen wurden dann empirische Methoden aufgeführt, um beliebig verlaufende Linien im Gradnetz praktisch auszumessen (s. S. 33).

Im nachstehenden hat Verfasser[1] versucht, die Linearveränderung für jedes beliebige Azimut rechnerisch zu bestimmen und hat dies an zwei Beispielen, und zwar für zwei echte Zylinderprojektionen, durchgeführt. Es ist hierdurch ein anderes Mittel gegeben, um die der Karte entnommenen Längen von Linien auf ihre wirklichen Werte zu reduzieren. Allerdings muß sich die Anwendung dieses Verfahrens auf gerade Strecken oder Teilstrecken beschränken, wie dies auch bei der Ermittlung der Längen von Linien mittels Rechnung der Fall ist.

Entwicklung der Linearveränderung für beliebiges Azimut bei zwei echten Zylinderprojektionen.

Im allgemeinen werden die Entfernungen zweier Punkte A und B auf der Karte und der Kugel A′ B′ nicht gleich sein (vgl. S. 85 Fig. 8). In den unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecken, von denen auch A′ B′ C′ als eben angesehen werden darf, entsprechen sich die unendlich kleinen linearen Entfernungen dS und ds auf Karte und Kugel. Ihr Verhältnis $\frac{dS}{ds}$ wird ein Maß für die Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Linie A′ B′ abgeben, d. i. die Linearveränderung, aber nur an der betrachteten Stelle. Der Wert $\frac{dS}{ds}$ wird mit dem Ort auf der Kugel sich ändern.

[1] unter Benutzung mathematischer Schullehrbücher.

Man bezeichnet ihn mit K und nennt ihn Linearmaßstab[1]. Man sieht also, daß für jeden Punkt ein anderer Maßstab gilt. Übrigens ist nicht zu vergessen, daß das Kartenbild nicht von der Erdkugel selbst abgenommen ist, sondern von einem Globus. Ist r sein Radius, R derjenige der Erdkugel, so ist letztere im Verhältnis $\frac{r}{R}$ verkleinert, daher der Sondermaßstab[2] der Karte in einem gegebenen Punkte und in einer gegebenen Richtung $\frac{r}{R} \cdot K = \frac{1}{v} \cdot K = \frac{K}{v}$.

Für das Linearverhältnis $K = \frac{dS}{ds}$, das wir im Azimut von dS und in dessen Breite ausdrücken werden, findet man keine so einfachen Ausdrücke, als daß damit geometrisch angenehm zu operieren wäre; wir werden jedoch versuchen, K für gewisse Breitenbezirke und gewisse Azimute zahlenmäßig zu ermitteln, so daß man wenigstens den ungefähren Linearfaktor für einen bestimmten Breitenbezirk bei gegebenem Azimut ω kennt.

1. Bei der Plattkarte mit einem längentreuen Parallel der Breite β ist

$$x = r \cdot \cos\beta \cdot \lambda$$
$$y \quad r \cdot \varphi.$$

Für ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck der Karte hat man dann

$$dx = r \cdot \cos\beta \cdot d\lambda$$
$$dy = r \cdot d\varphi \qquad \text{als Katheten.}$$

Die Hypothenuse dS ist mithin

$$= \sqrt{dx^2 + dy^2} = r \cdot \sqrt{\cos^2\beta\, d\lambda^2 + d\varphi^2}.$$

Hierbei ist natürlich β konstant; es gibt den Parallel der Kartenmitte.

Ferner sind die Katheten des unendlich kleinen und als eben zu betrachtenden Kugeldreiecks A′ B′ C′

$$r \cdot \cos\varphi\, d\lambda, \text{ resp. } r \cdot d\varphi,$$

[1] hier synonym mit Linearverzerrungsfaktor oder Längenmodul. Siehe S. 30.
[2] siehe S. 30.

woraus folgt

$$ds = r\sqrt{\cos^2\varphi\, d\lambda^2 + d\varphi^2}.$$

Damit ergibt sich für den Linearmaßstab $K = \frac{dS}{ds}$:

$$K = \sqrt{\frac{\cos^2\beta \cdot d\lambda^2 + d\varphi^2}{\cos^2\varphi \cdot d\lambda^2 + d\varphi^2}},$$

oder, indem man den Ausdruck unter der Wurzel im Zähler und Nenner durch $d\lambda^2$ dividiert:

$$K = \sqrt{\frac{\cos^2\beta + \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2}{\cos^2\varphi + \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2}}.$$

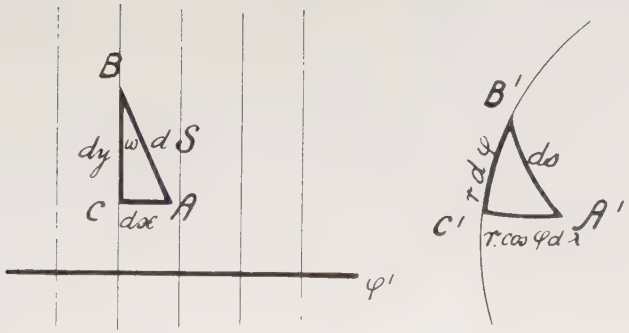


Fig. 8.

Aus dem Elementardreieck auf der Karte A B C ergibt sich aber, falls die Fortschreitungsrichtung B A mit dem Meridian das Azimut ω bildet:

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang}\omega = \cos\beta \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi},$$

woraus folgt:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos\beta \cdot \operatorname{cotg}\omega.$$

Mit diesem Werte von $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ geht K über in den Ausdruck:

$$K = \sqrt{\frac{\cos^2\beta + \cos^2\beta \cdot \operatorname{cotg}^2\omega}{\cos^2\varphi + \cos^2\beta \cdot \operatorname{cotg}^2\omega}} = \sqrt{\frac{\cos^2\beta(1 + \operatorname{cotg}^2\omega)}{\cos^2\varphi + \cos^2\beta \cdot \operatorname{cotg}^2\omega}}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\omega \cdot \cos^2\varphi + \cos^2\omega \cdot \cos^2\beta}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2\omega \cdot \cos^2\varphi\,(1+\tan g^2\beta)+\cos^2\omega}}. \qquad (I)$$

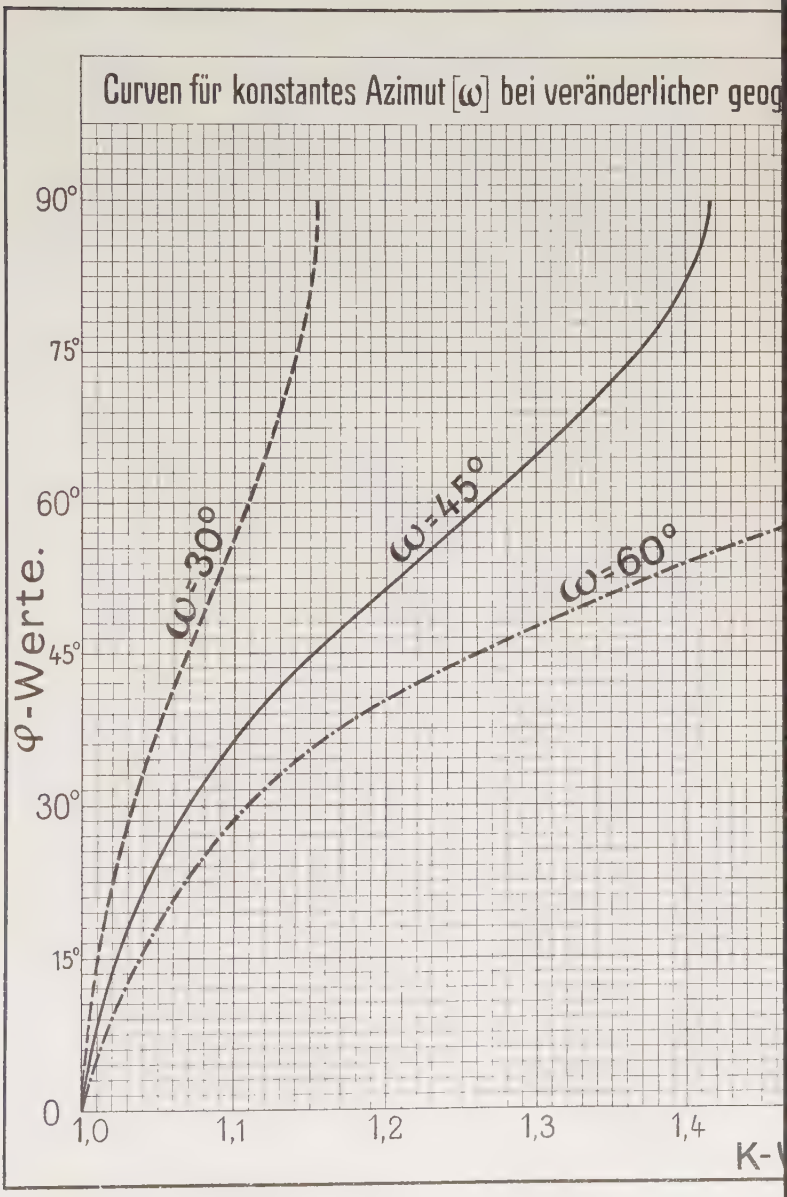
Längentreue herrscht: erstens im Meridian: $\omega = 0$, zweitens in einer unendlich schmalen Zone des Parallelkreises unter beliebigem Azimut, denn für beide Annahmen ist $K = 1$.

A. Quadratische Plattkarte				B. Rechteckige Plattkarte mit dem 45. Breitenparallel als längentreuem Parallel			
φ	ω	K	Bemerkungen	φ	ω	K	Bemerkungen
30°	0°	1,000	Längentreue	30°	0°	1,000	Längentreue
	30°	1,033			30°	0,943	
	45°	1,069			45°	0,894	
	60°	1,109[1]			60°	0,853	
	90°	1,155	Maximum der Linearverzerrung		90°	0,816	Maximum der Linearverzerrung
45°	0°	1,000	Längentreue	45°	0°—90°	1,000	Längentreue
	30°	1,069					
	37°	1,109[1]					
	45°	1,155					
	60°	1,265					
	90°	1,414	Maximum der Linearverzerrung				
60°	0°	1,000	Längentreue	60°	0°	1,000	Längentreue
	30°	1,109[1]			30°	1,069	
	45°	1,265			45°	1,154	
	60°	1,512			60°	1,265	
	90°	2,000	Maximum der Linearverzerrung		90°	1,414	Maximum der Linearverzerrung

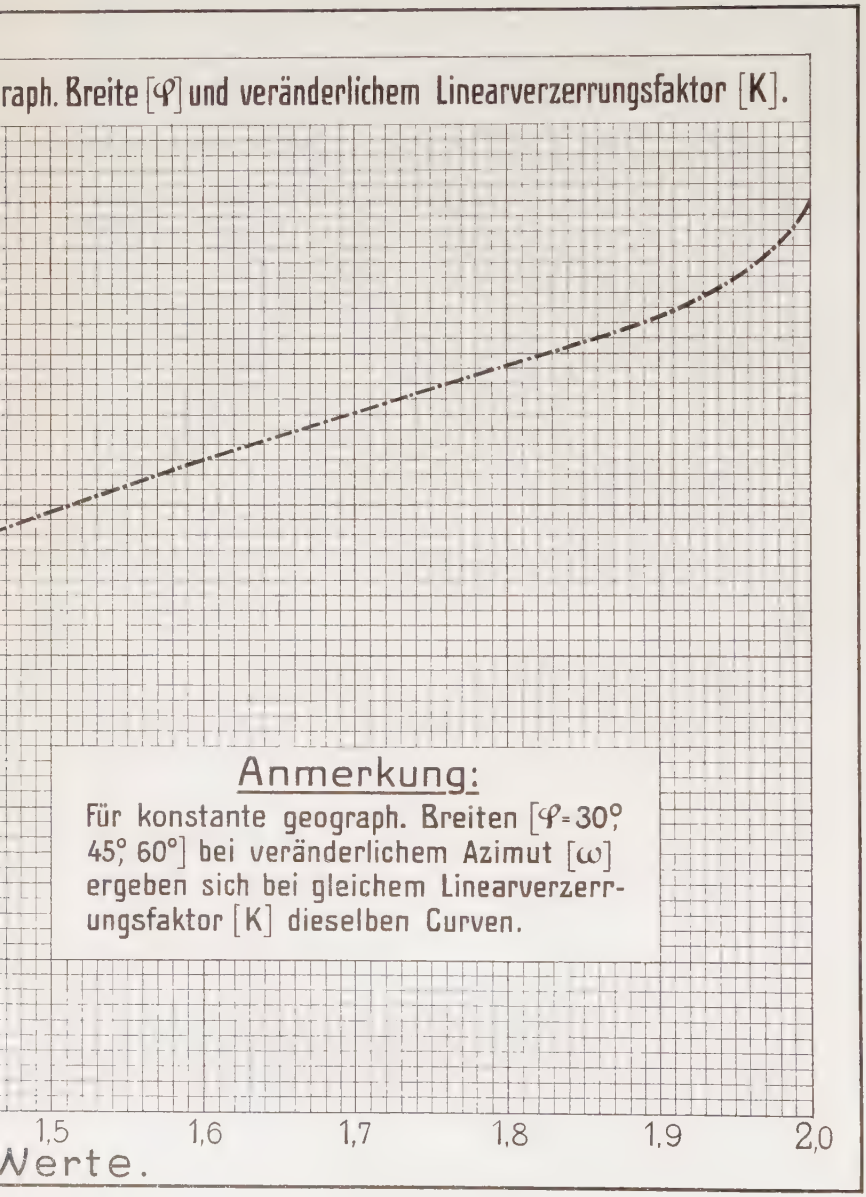
[1] Bei der quadratischen Plattkarte beträgt beispielsweise die Linearveränderung rund $\frac{1}{9}$ (nämlich Linearverzerrungsfaktor $K = 1{,}109$):

bei 30° geographischer Breite für 60° Azimut,
„ 45° „ „ „ 37° „
„ 60° „ „ „ 30° „

Zur quadratisc



chen Plattkarte.



Für die quadratische Plattkarte ($\beta = 0°$) vereinfacht sich die Formel in

$$K = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \omega \cos^2 \varphi + \cos^2 \omega}}.$$

Hierfür und für eine rechteckige Plattkarte mit dem längentreuen Parallel $\beta = 45°$, also

$$K = \frac{1}{\sqrt{2 \sin^2 \omega \cos^2 \varphi + \cos^2 \omega}}$$

sind in nebenstehender Tabelle die K-Werte ausgerechnet.

Graphisch dargestellt ergeben sich für die Tabelle A auf anliegendem Blatt dargestellte Kurven, die sämtlich Wendepunkte (Flexuren) enthalten.

2. Bei Lamberts flächentreuer Zylinderprojektion mit längentreuem Äquator ist

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \lambda \\ y &= r \cdot \sin \varphi, \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} dx &= r \cdot d \cdot \lambda \\ dy &= r \cdot \cos \varphi \, d\varphi \\ dS^2 &= r^2 (d\lambda^2 + \cos^2 \varphi \, d\varphi^2) \end{aligned}$$

und wiederum

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 \cdot \cos^2 \varphi \, d\lambda^2 + r^2 \, d\varphi^2 \\ &= r^2 \cdot (\cos^2 \varphi \, d\lambda^2 + d\varphi^2) \end{aligned}$$

$$K^2 = \left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{d\lambda^2 + \cos^2 \varphi \, d\varphi^2}{\cos^2 \varphi \, d\lambda^2 + d\varphi^2}$$

$$= \frac{1 + \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2}{\cos^2 \varphi + \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang} \omega = \frac{d\lambda}{\cos \varphi \, d\varphi}$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\operatorname{cotg} \omega}{\cos \varphi},$$

folglich

$$K^2 = \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 \omega}{\cos^2 \varphi + \frac{\operatorname{cotg}^2 \omega}{\cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\cos^2 \varphi \sin^2 \omega + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \cos^2 \omega}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi \sin^2\omega + \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \cos^2\omega}} \qquad \text{(II)}$$

Wir spezialisieren diese Formel folgendermaßen: Erst lassen wir ω unbestimmt und setzen der Reihe nach für φ 30°, 45°, 60° ein. Wir bekommen:

1. $$K = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}\sin^2\omega + \frac{4}{3}\cos^2\omega}} = \sqrt{\frac{12}{(3\sin\omega)^2 + (4\cos\omega)^2}}$$

2. $$K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin^2\omega + 2\cos^2\omega}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\omega + (2\cos\omega)^2}}$$

3. $$K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\omega + 4\cos^2\omega}} = \sqrt{\frac{4}{\sin^2\omega + (4\cos\omega)^2}}.$$

Und nun ad 1:

($\varphi = 30°$)

Verzerrungsfaktor

$\omega = 30°$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = 0{,}755.$

$\omega = 45°$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = 0{,}980$

$\sim 1 \sim$ Längentreue.

Verzerrungsfaktor

$\omega = 60°$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{48}{43}} = 1{,}116.$

ad 2:

($\varphi = 45°$)

$\omega = 30°$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{8}{13}} = 0{,}786.$

$\omega = 45°$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816.$

$\omega = 54^1/_4°$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1{,}00$ Längentreue.

Verzerrungsfaktor.

$\omega = 60^0$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{8}{7}} =$ 1,069.

ad 3:
($\varphi = 60^0$)

$\omega = 30^0$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7} =$ 0,571.

$\omega = 45^0$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 2}} = \sqrt{\frac{8}{17}} =$ 0,686.

$\omega = 60^0$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + 1}} = \sqrt{\frac{16}{19}} =$ 0,918.

$\omega = 63^1/_2{}^0$; $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{19}{20}}} = \sqrt{\frac{1}{1}} =$ 1,00 Längentreue.

Es wäre eine für jüngere Kräfte geeignete, des praktischen Interesses nicht entbehrende Aufgabe, analog die Verzerrungsfaktoren bei den Azimuten 30°, 45°, 60° auch für andere Gradnetzentwürfe zu berechnen und tabellarisch und graphisch darzustellen.

Mit solchen zonenweise aufgestellten (angenäherten) Verzerrungsfaktoren wird man im allgemeinen auskommen, um die der Karte entnommenen Längen gerader Strecken auf ihre wirklichen Werte zu reduzieren. Für ganz scharfe Bestimmungen von K müßte die Rechnung natürlich genau ausgeführt werden.

Für winkeltreue Gradnetzentwürfe vereinfachen sich die Formeln, da bei ihnen die Linearveränderung von der Richtung unabhängig, also in einem gegebenen Punkte für alle Azimute (ω) die gleiche ist. Vgl. auch S. 32. Die Rechnung läßt sich aber nicht anwenden, wenn die Meridiane (Kurven) auf den Parallelen nicht mehr senkrecht stehen, wie bei den unechten Zylinder- und Kegelprojektionen, z. B. bei der Sanson-Flamsteedschen und der Bonneschen.

Folgesätze.

1. Für kartometrische Zwecke ist der Globus ungeeignet.
2. Topographische Karten können praktisch in allen Teilen und Richtungen als längen-, flächen- und winkeltreu betrachtet werden.
3. Bei topographischen Karten sind die Fehler der Reproduktion (Papier) größer als die im Maßstab und Gradnetzentwurf beruhenden.
4. Je größer der Maßstab ist, um so mehr machen sich die absoluten Werte der Längenfehler geltend.
5. Für kartometrische Zwecke verdienen bei topographischen Karten die Gradabteilungskarten den Vorzug, sobald es sich um einzelne oder wenige aneinanderzulegende Blätter handelt.
6. Handelt es sich um topographische Karten, deren Blätter zu einem großen Gebiet zusammenzulegen sind, so sind Gradabteilungskarten ungünstiger als andere.
7. Bei allen Karten ist für genaue Messungen eine Nachprüfung des angegebenen Verjüngungsverhältnisses nötig.
8. Linienmessungen sollten vorwiegend auf Karten vorgenommen werden, die recht viele längentreue Linien enthalten, und zwar ist Karten mit einfach definierbaren Verzerrungen der Vorzug zu geben. Man wähle solche mit einfach verlaufenden Äquideformaten.
9. Bei genauen Messungen beliebig verlaufender Linien sind die Verzerrungen maschen- oder zonenweise zu berücksichtigen.
10. Für genaue Messungen von orthodromischen oder loxodromischen Entfernungen läßt sich die Berechnung nicht entbehren; man wird sie vielmehr anwenden müssen, sei es ausschließlich, sei es zum Vergleich.
11. In geographischen Karten, die sich auf große Erdstriche oder gar Erdteile ausdehnen, sollten Äquideformaten angedeutet sein, besonders gilt dies für die unecht-konischen und -zylindrischen Entwürfe.
12. Die Generalisierung ist zwar in hohem Maße vom Verjüngungsverhältnis abhängig, in weit höherem aber vom Kartographen, so daß der Einfluß des Maßstabes sich nicht

durch mathematische Formeln ausdrücken läßt. Außerdem ist die Generalisierung vom Verwendungszweck der Karten abhängig.

13. In allen Karten sollten die Linearmaße der Längen- und Breitengrade der Gradnetzmaschen am Kartenrande angegeben sein.
14. Es ist wünschenswert, daß alle Kartenblätter eines Systems unabhängig vom Maßstabe dieselbe Blattgröße haben, so daß z. B. auf ein Blatt im Maßstabe 1:100000 16 Blatt 1:25000 passen.
15. Kurvimetrische Linienmessungen sollten schnell und ohne Unterbrechung ausgeführt werden, um die in der Verschiedenheit der Temperatur und des Feuchtigkeitsgehalts des Papiers beruhenden Fehler möglichst auszuschalten. Die Auszirkelung ist nur bei rohen Bestimmungen vorzunehmen. Für genauere Messungen sind Kurvimeter einfacher mathematischer Konstruktion, z. B. das System Ule, vorzuziehen.

Anlage 1.

Flußlängen.

Lfd. Nr.	Jahr	Rhein		Ganges		Nil		Bemerkungen
		Meilen	km	Meilen	km	Meilen	km	
1	1748	140	1039	—	5200	—	—	Umrechnungsmaße: 1 deutsche geogr. Meile = 7,42 km, 1 englische Meile = 1,61 km.
2	1812	360	—	7—800	5200	—	—	
3	1841	190	1410	300	2230	560	4155	
4	1843	150	1113	420	3116	560	4155	
5	1850	150	1113	—	—	—	—	
6	1854	150	1113	420	3116	300	2230	Zu lfd. Nr. 2: Die hohen Zahlen lassen vermuten, daß ein anderes Grundmaß als die geographische oder deutsche Meile gemeint ist.
7	1859	150	1113	420	3116	600	4450	
8	1859	—	—	—	—	560	4155	
9	1864	—	1150	420 und 290	3116 und 2150		—	
10	1867	175	1299	350	2597	600	4450	
11	1869	190 und 150	1410 und 1113	420	3116	—	—	
12	1876	—	1300	—	3120	—	6380	
13	1882	—	1032	—	2460	—	5600	
14	1883	—	1225		—	—	—	
15	1885	—	1225		—	—	—	
16	1890	—	1200	—	2460	—	6000	
17	1892	—	1200	—	2500	—	6000	
18	1895	—	1298	—	2708	—	6470	
19	1895	—	1142[1] und 1310[2]	—	2349	—	5600	[1] Nach Strelbitzky. [2] Älteres Maß.
20	1901	—	—	—	—	—	6000	
21	1903	—	1162	—	2597	—	5940	(Rhein von Reichenau an, Alexandra-Nil.)
22	1904	—	—	—	2700		—	
23	1905	—	1320		2597	—	ca. 6000	
24	1906	—	1300		—	—	6500	
25	1906	—	1300	—	Delta 370	—	über 5000	
26	1906	—	1246,6[3] 1232,6[4]	—	2700	—	6397	Alexandra-Nil. [3] Mit Vorder-R. [4] „ Hinter-R.

Lfd. Nr.	Jahr	Rhein		Ganges		Nil		Bemerkungen
		Meilen	km	Meilen	km	Meilen	km	
27	1906	—	—	—	2500	—	6397	
28	1908	—	1300	—	2500	—	6000	
							6497[1]	[1] Nach Lyons Physiography of the River Nile. Kairo 1906.
29	1908	—	—	—	—	—	6500	
30	1909	—	1360	—	2500	—	6397	Alexandra-Nil.
31	1909	—	1300	—	2700	—	6000	
32	1910	850	1368	1540 1680	2480 2705	3473	5590	Vom Austritt aus d. Victoria-Nyanza.
33	?	—	1225	—	2427	—	6270	Ganges bis zur Bai von Sagar.

Quellennachweis zur Anlage 1.

Erschein.-Jahr	Nr.	
1748	1	Leipzig, Geographisches und kritisches Lexikon, übersetzt nach Mr. Bruzen la Martinière, Dictionnaire géographique et critique, 9. Teil, S. 890 Rhein 140 deutsche Meilen.
1812	2	Iferten, Leitfaden beim methodischen Unterricht in der Geographie, S. 455 Rhein 360 Meilen, S. 460 Ganges 7—800 Meilen.
1841	3	Mainz, Lehrbuch der Geographie alter und neuer Zeit von Theodor Schacht, S. 148 Rhein 190 Meilen, S. 259 Ganges 300 Meilen, S. 259 Nil 560 Meilen.
1843	4	Breslau, Grundriß der Geographie von Dr. Heinr. Berghaus, Anh. S. 19 Rhein 150 Meilen, Ganges 420 Meilen, Nil 560 ? Meilen.
1850	5	Halle, 3. Aufl., Lehrbuch der Geographie von Dr. Herm. Daniel, S. 161 Rhein 150 Meilen. Nil und Ganges fehlen.
1854	6	Berlin, 2. Aufl., Abriß der Geographie von Gust. Ad. Klöden, S. 229 Rhein 150 Meilen, S. 39 Ganges 420 Meilen, Nil 300 ? Meilen.

Erschein.-Jahr	Nr.	
1859	7	Galetti, Allgemeine Weltkunde (Pest, Wien und Leipzig), S. 134 Rhein 150 Meilen, Ganges 420 Meilen, Nil 600 Meilen.
1859	8	Frankfurt a. M., 1. Aufl., Handbuch der Geographie von Herm. Daniel, Bd. 1, S. 389 Nil 560 Meilen. Rhein und Ganges nicht zu finden.
1864	9	Leipzig, 7. Aufl., Handbuch der Geographie und Statistik von Stein, Bd. III, 2. Teil (1862—1871), S. 283 Rhein 1150 km, Bd. II, 3. Teil (1864), S. 39 Ganges 420 Meilen nach Berghaus, 290 Meilen nach Ritter.
1867	10	Berlin, 4. Aufl., Lehrbuch der Geographie von Gust. Ad. Klöden, S. 185 Rhein 175 Meilen, S. 29 Nil 600 Meilen, Ganges 350 Meilen.
1869	11	Leipzig, 1. Aufl., Enzyklopädie der Erde, Völker- und Staatenkunde von Dr. W. Hoffmann, Bd. III, S. 2114 Rhein 190 Meilen (nach anderen 150 Meilen), Bd. I (1862) S. 832 Ganges 420 Meilen. Nil fehlt.
1876	12	Breslau, 16. Aufl., 2. Teil, Grundzüge der Geographie von E. v. Seydlitz, S. 155 Rhein 1300 km, S. 60 Ganges 3120 km, S. 78 Nil 6380 km.
1882	13	Bielefeld und Leipzig, Geographisches Handbuch zu Andrees Handatlas, S. 628 Rhein 1032 km, S. 262 Ganges 2460 km, S. 141 Nil 5600 km.
1883	14	Hannover, 5. Aufl., Lehrbuch der Geographie von Guthe Wagner, S. 50 Rhein 1225 km.
1885	15	Halle, 64. Aufl., Lehrbuch der Geographie von Herm. Daniel, S. 178 Rhein 1225 km.
1890	16	Berlin, 8. Aufl., Leitfaden beim Unterricht in der Geographie von Gust. Ad. Klöden, S. 81 Rhein 1200 km, S. 82 Ganges 2460 km, S. 81 Nil 6000 km.
1892	17	Breslau, 21. bearbeitete Ausgabe B, Seydlitzsche Geographie, S. 36 Rhein 1200 km, Ganges 2500 km, Nil 6000 km.
1895	18	Leipzig, 6. Aufl., Handbuch der Geographie von Daniel, S. 1071—1073 Rhein 1298 km, Ganges 2708 km, Nil 6470 km.
1895	19	Leipzig, 8. Aufl., Ritters Geographisch-statistisches Lexikon, S. 597 Rhein nach Strelbitzky 1141,7 km, nach früheren Berechnungen 1310 km, S. 648 Ganges 2349 km, S. 338 Nil 5600 km.

Erschein.-Jahr	Nr.	
1901	20	Leipzig und Wien, 2. Aufl., Afrika von Friedr. Hahn, S. 66 Nil 6000 km.
1903	21	Berlin und Wien, 4. Aufl., Brockhaus Konversationslexikon Bd. XIII, S. 825 Rhein (von Reichenau—Nordsee) 1162 km, Bd. VII (1902), S. 409 Ganges 2597 km, Bd. XII, S. 382 Nil (Alexandra—Nil als Hauptfluß) 5940 km.
1904	22	Leipzig und Wien, 2. Aufl., Asien von Wilh. Sievers, S. 507 Ganges 2700 km.
1905	23	Ritters Geographisch-statistisches Lexikon (herausgegeben von Penzler), 9. Aufl., Bd. II, S. 680 Rhein 1320 km, Bd. I., S. 770 Ganges 2597 km, Bd. II, S. 391 Nil ca. 6000 km.
1906	24	Halle, 250. Aufl., Leitfaden der Geographie von H. A. Daniel, S. 244 Rhein 1300 km, Nil 6500 km.
1906	25	Leipzig, 17. Aufl., Präparationen für den geographischen Unterricht von Julius Tischendorf, 3. Teil, Abt. 2, S. 183 Rhein 1300 km, 5. Teil, S. 108 Ganges—Delta 370 km, 5. Teil, S. 212 Nil über 5000 km.
1906	26	Freiburg, 3. Aufl., Herders Konversationslexikon, Bd. VII (1904) S. 507 Rhein (mit Vorder-R.) 1246,6 km, Rhein (mit Hinter-R.) 1232,6 km, Bd. VI (1906), S. 639 Nil—Kagera 6397 km, Nil vom Austritt aus dem Viktoriasee an 5589 km, Bd. III (1904), S. 1033 Ganges 2700 km.
1906	27	Leipzig und Wien, 6. Aufl., Meyers Großes Konversations-Lexikon 1907, Bd. XVI, S. 862 Rhein 1225 km, 1904, Bd. VII, S. 319 Ganges 2500 km, 1906, Bd. XIV, S. 699 Nil 6397 km, vom Viktoriasee aus 5589 km.
1908	28	Breslau, 23. bearbeitete Ausgabe B, E. v. Seydlitz' Geographie, Kleines Lehrbuch, S. 248 Rhein 1300 km, Ganges 2500 km, Nil 6000 km.
1908	29	Hannover und Leipzig, 8. Aufl., Bd. I, Lehrbuch der Geographie von Herm. Wagner, S. 448. Nil—Kagera 6500 km.
1909	30	Leipzig und Wien, 7. Aufl., Meyers Kleines Konversations-Lexikon, Bd. V, S. 643 Rhein 1360 km, Bd. III, S. 14 Ganges 2500 km, Bd. IV, S. 1005 Nil 6397 km.
1909	31	Bielefeld und Leipzig, 5. Aufl., Geographisches Handbuch von Scobel, Bd. I, S. 430 Rhein 1300 km, Bd. II (1910), S. 34 Ganges 2700 km, Bd. II (1910), S. 218 Nil 6000 km.

Erschein.-Jahr	Nr.	
1911	32	Edition 11, The Encyclopedia Britannia (Cambridge), Bd. XIX, S. 692 Nile from the outlet at Victoria Nyanza to the sea is 3473 m long, Bd. XI (1910) According to the last calculations, the length of the main stream of the Ganges is 1540 m, or with its longest affluent 1680 m, Bd. XXIII (1911), S. 240 about 850 m the length of the Rhine.
	33	La grande Encyclopédie, Paris (ohne Jahr), vermutlich ca. 1900, Bd. XXVIII, S. 374 le Rhin 1225 km, Bd. XXIV, S. 1112 Nil 6270 km, Bd. XVIII, S. 449 Ganges depuis la source de la Yahnavi jusqu'à la baie de Sagar, à l'embouchure de l'Hugli mesure 2427 km.

Anlage 2.

Kurvimetrische Längenmessungen von Flußläufen im Vergleich mit den entsprechenden geodätisch aufgenommenen Werten.

Lfd. Nr.	Messungsobjekt	Sollänge km	Quelle der Angabe der Länge	Art der geographischen Karte	Maßstab der Karte 1:	Gemessene Länge km	Korrektionsfaktor
1	Rhein, von Mainz bis Emmerich	351,5+1	Anlage zur hydrographischen Karte von Norddeutschland [1]	Topographische Übersichtskarte von Deutschland	200000	346,6	1,014
2	Rhein, von Basel bis Mainz	331	dto.	Wasserkarte der norddeutschen Stromgebiete	1000000	309	1,074
3	Rhein, von Basel bis Köln	520+1	dto.	Sydow-Wagners Atlas 1910 Bl. 22	2500000	484	1,075
4	Rhein, von Basel bis Wesel	644,5+1	dto.	dto. Bl. 16	5000000	577,5	1,116
5	Rhein, Quelle bis zur Mündung	1221+3	Meyers u. Brockhaus' Konversationslexika 1909	dto. Bl. 14	6000000	1064	1,148
6	dto.	1221+3	dto.	dto. Bl. 11	20000000	1000	1,221
7	Weichsel, Quelle bis zur Mündung	1072+4	dto.	Hydrographische Karte von Norddeutschland	1250000	899	1,192
8	dto.	1072+4	dto.	Sydow-Wagners Atlas 1910 Bl. 16	5000000	895	1,198
9	dto.	1072+4	dto.	dto. Bl. 14	6000000	888	1,207
10	dto.	1072+4	dto.	dto. Bl. 11	20000000	870	1,232
11	Donau, Quelle bis zur Mündung	2860	dto.	Dierckes Schulatlas 1908 Bl. 122/123	4500000	2588	1,105
12	dto.	2860	dto.	Andrees Handatlas Bl. 23/24 und 115/116	9000000	2480	1,153
13	dto.	2860	dto.	Sydow-Wagners Atlas 1910 Bl. 11	20000000	2320	1,232
14	Wolga, von Nishnij-Nowgorod bis Astrachan	2310	Reichskursbuch 1911	Andrees Handatlas Bl. 115/116	8700000	1958	1,180
15	dto.	2310	dto.	Sydow-Wagners Atlas 1910 Bl. 11	20000000	1893	1,216

[1] für laufende Nummer 1, 3, 4 auch Reichskursbuch 1911.

Anlage 3.

Aufgabe: Gegeben sind auf einer Erdhalbkugelkarte in orthographischer Projektion zwei Orte A′ und B′. Es ist die Projektion des die Orte verbindenden Großkreisbogens und dessen wahre Länge zu zeichnen.

Anmerkung: Der Doppelbogen im Winkelzeichen bedeutet rechter Winkel.

Lösung[1]: Man zieht durch die Punkte A′ und B′ eine Gerade, konstruiert dann über dieser Geraden als Sehne des Kreises einen Halbkreis und errichtet auf dieser Sehne in den Punkten A′ und B′ Senkrechte, die den konstruierten Halbkreis in den Punkten A_1 und B_1 treffen. Die Verbindungslinie der Punkte A_1 B_1 schneidet die Verbindungslinie der Orthodrome Punkte A′ B′ im Punkte S. Dann zieht man eine Gerade durch S und den Erdmittelpunkt M und fällt von A′ B′ Lote auf diese Hilfslinie, welche die Erdperipherie in den Punkten a b schneiden. Das Bogenstück a — b gibt dann die Länge der orthodromischen Verbindung von A′ — B′. Der projizierte Verlauf der Orthodrome A′ B′, der einen Ellipsenbogen bildet, ist leicht einzuzeichnen, da von dieser Ellipse gegeben sind der große Durchmesser und zwei Ordinaten, nämlich die von A′ B′ auf die große Achse gefällten Lote.

[1] nach einem Kolleg des Prof. Reichel über darstellende Geometrie. Berlin S.-S. 1910.

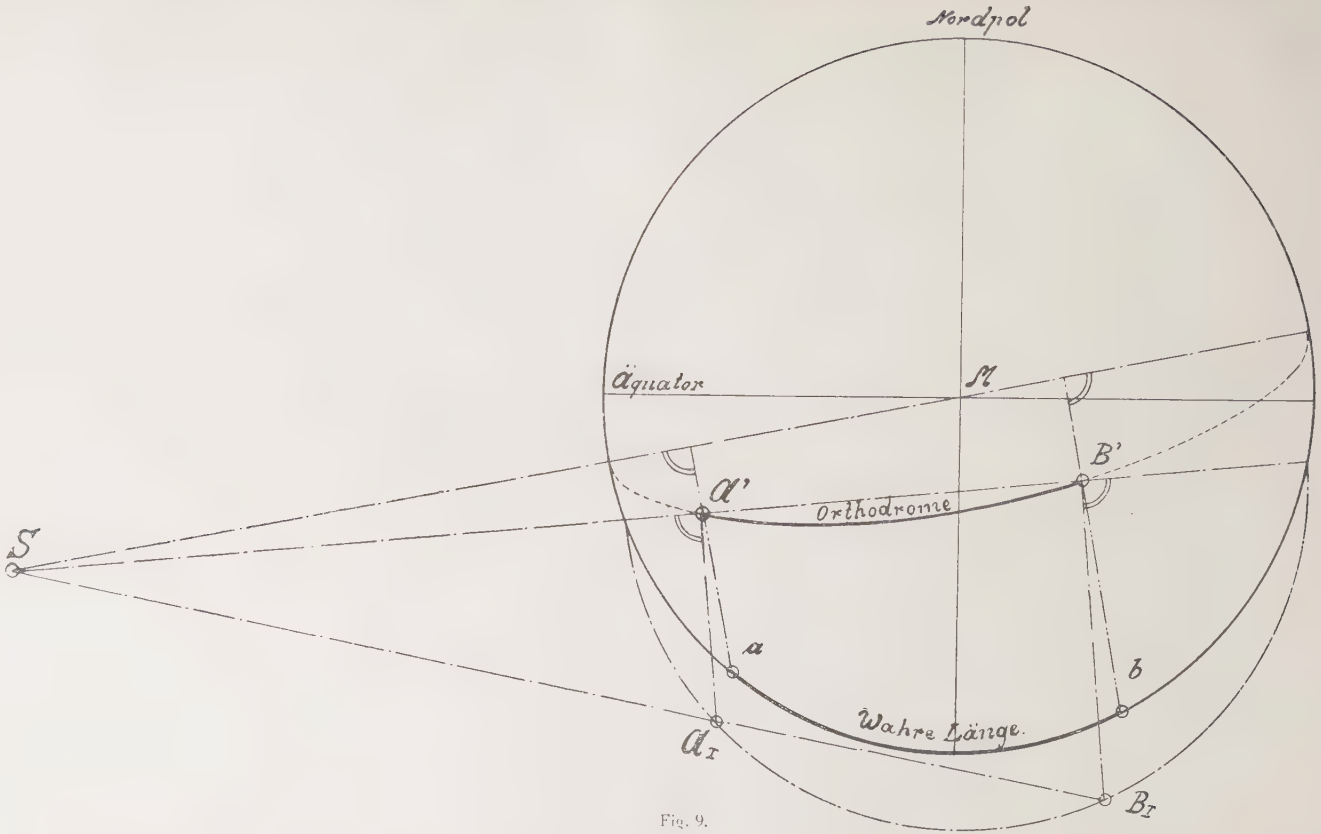


Fig. 9.

Anlage 4.

Entwicklung der Gleichung der Kurve, welche die Projektion der Orthodrome auf den die Erdkugel im Äquator berührenden Zylinder bildet,

und zwar

A für die quadratische Plattkarte,
B für die Mercatorkarte.

η = geographische Breite,
λ = „ Länge.

Gleichung der Kugel

$$(1)\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Gleichung einer Ebene durch die y-Achse unter der Horizontalneigung η'

$$(2)\quad z = x \tan \eta' .$$

(1) und (2) gemeinsam sind die Gleichung des Großkreises K.
Es ist ferner stets

$$(3)\quad z = \sin \eta ,$$
$$(4)\quad y = x \tan \lambda .$$

Aus (1), (2), (3) und (4) eliminiert man x, y, z.
Zunächst z eliminiert ergibt:

$$x^2 + y^2 (1 - \sin^2 \eta) = \cos^2 \eta$$
$$x \tan \eta' = \sin \eta$$
$$y = x \tan \lambda .$$

Hieraus y eliminiert:

$$x^2 (1 + \tan^2 \lambda) = \cos^2 \eta \text{ oder } \frac{x^2}{\cos^2 \lambda} = \cos^2 \eta \quad x \tan \eta' = \sin \eta .$$

Hieraus x eliminiert:

$$\frac{\sin^2 \eta}{\tan^2 \eta' \cos^2 \lambda} = \cos^2 \eta \text{ oder } \tan \eta = \pm \tan \eta' \cos \lambda .$$

A. Dies ist für ein konstantes η' die Gleichung eines Großkreises in den Koordinaten η und λ. Bei der Projektion $y = \eta$, $x = \lambda$ ist also die Gleichung der gesuchten Kurve

$$\tan y = \pm (\tan \eta') \cdot \cos x \text{ oder } \tan y = \pm c \cdot \cos x.$$

B. Für eine Projektion $x = \lambda$, $y = \log \tan \left(45 + \frac{\eta}{2}\right)$ ist $e^y = \tan \left(45 + \frac{\eta}{2}\right)$

$\frac{2 e^y}{1 - e^{2y}} = \tan (90 + \eta) = - g \eta$, also $\tan \eta = \frac{e^y}{2} - \frac{e^{-y}}{2}$. Danach wird

$$e^y - e^{-y} = \pm 2 \tan \eta' \cos x.$$

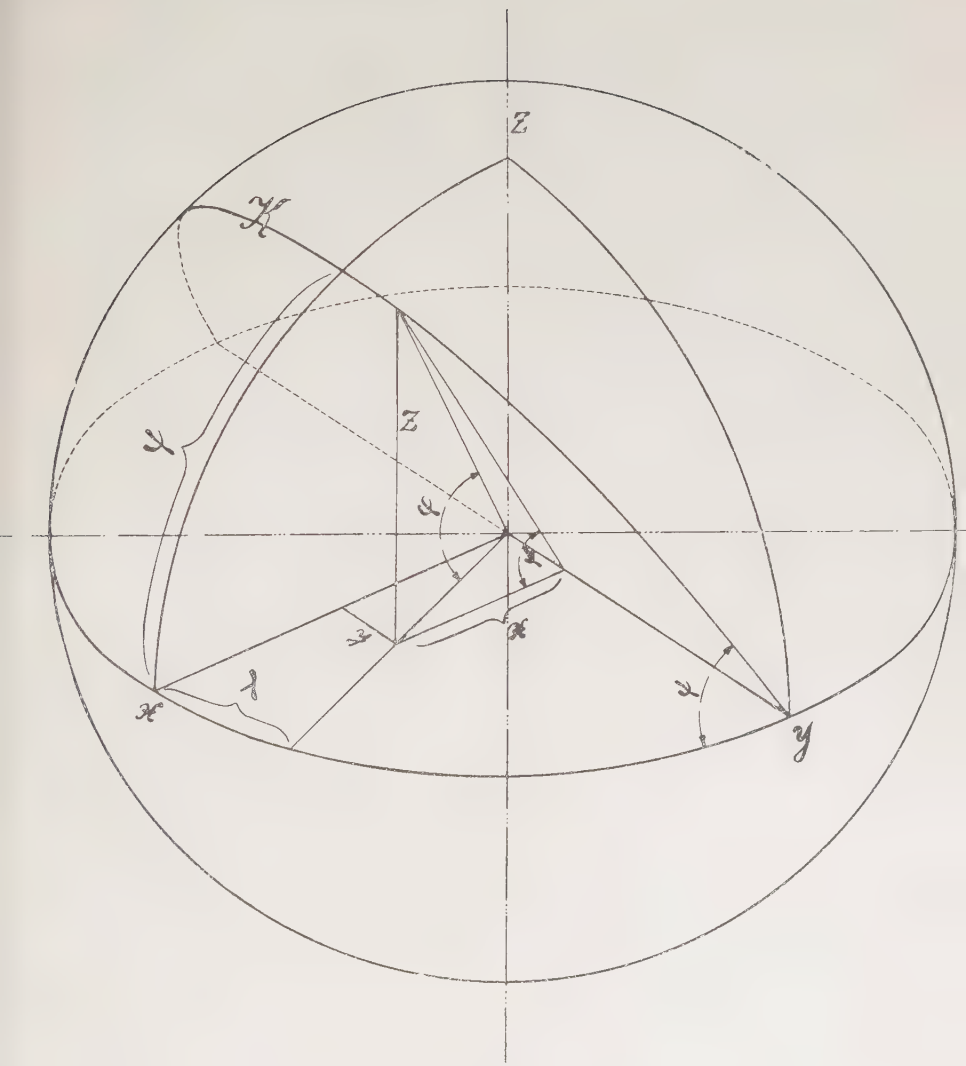


Fig. 10.

Anlage 5.

Vergleich loxodromischer und orthodromischer Entfernungen.

Lfd. Nr.	Endpunkte	Loxodrome Seemeilen.	Orthodrome Seemeilen	Unterschied im ganzen Seemeilen	Unterschied %	Scheitel
1	Kap Hatteras und Kap der guten Hoffnung	6742	6716	26	0,385	Äquator in 27° 29′ W.
2	Kap der guten Hoffnung und Hobarttown (Tasmania)	6149	5384	765	14,2	61° 54′ S. 87° 5′ W.
3	Kap Horn und Ostkap von Neu-Seeland	4740	4249	491	11,6	64° 42′ S. 112° 43′ W.
4	Valparaiso und Kap Palliser	5417	4995	422	8,5	54° 31′ S. 133° 44′ W.
5	Kap Horn und Kap Elisabeth (Amur)	9717	9532	185	1,94	Äquator in 153° 54′ W.
6	Bermuda und Lizard	2873	2812	61	2,123	49° 58′ N. 6° 57′ W.
7	Kap Henry (Chesapeake B) und St. Ubes (Portugal)	3189	3116	73	2,289	42° 54′ N. 40° 3′ W.
8	Otago (Neu-Seeland) und Kap Callao	6088	5764	324	5,322	50° 31′ S. 157° 5′ W.

Anlage 6.

Airys Hilfstabelle zur Konstruktion des Hauptbogens auf der Mercatorkarte.

Mittelbreite	Entsprechender Parallel	Mittelbreite	Entsprechender Parallel
20°	81° 13′	58°	4° 0′
22°	78° 16′	60°	9° 15′
24°	74° 59′	62°	14° 32′
26°	71° 26′	64°	19° 50′
28°	67° 38′	66°	25° 9′
30°	63° 37′	68°	30° 30′
32°	59° 25′	70°	35° 52′
34°	55° 5′	72°	41° 14′
36°	50° 36′	74°	46° 37′
38°	46° 0′	76°	52° 1′
40°	41° 18′	78°	57° 25′
42°	36° 31′	80°	62° 51′
44°	31° 38′		Auf gleichnamiger Breite wie die Orte
46°	26° 42′		
48°	21° 42′		
50°	16° 39′		
52°	11° 33′		
54°	6° 24′		
56°	1° 13′		
	Auf entgegengesetzter Breite wie die Orte		

Vorwiegend benützte Literatur.

(Nach dem Erscheinungsjahr geordnet.)

Gretschel, H., Lehrbuch der Kartenprojektion. Weimar 1873.

Fiorini, M., Le projezioni delle carte geografiche. Bologna 1881.

Tissot, A., Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. Paris 1881.[1]

Fiorini, M., Misure lineari superficiali ed angolari offerte dalle carte geografiche. Firenze 1886.

Struve, H., Landkarten, ihre Herstellung und ihre Fehlergrenzen. Berlin 1887.

Tissot, A., Die Netzentwürfe geographischer Karten. Autorisierte deutsche Bearbeitung von E. Hammer. Stuttgart 1887. (Siehe Fußnote 1.)

Hammer, E., Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen. Stuttgart 1889.

Breusing, A., Das Verebnen der Kugeloberfläche für Gradnetzentwürfe. Leipzig 1892.

Rohrbach, K., Zur mathematischen Behandlung geographischer Probleme. Berlin 1893. In: Festschrift, Freiherrn von Richthofen zum 60. Geburtstage dargebracht.

Zöppritz, K., Leitfaden der Kartenentwurfslehre,[2] 2. Aufl. von A. Bludau. Teil 1, Leipzig 1899; Teil 2, Leipzig 1908.

Lehrbuch der Navigation. Herausgegeben vom Reichs-Marine-Amt. Bd. I. Berlin 1901.

Vital, A., Die Kartenentwurfslehre. Wien 1903.

Frischauf, J., Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie. Leipzig 1905.

Schmiedeberg, W., Zur Geschichte der geographischen Flächenmessung bis zur Erfindung des Planimeters. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde, Berlin 1906 Nr. 3 und 4.

Wagner, H., Lehrbuch der Geographie, 8. Aufl., zugleich 3. Aufl. der Neubearbeitung des Lehrbuchs der Geographie von Guthe-Wagner. Bd. I: Allgemeine Erdkunde. Hannover 1908. (Im besonderen das Kapitel über Kartometrie.)

[1] Die mit Tissot-Hammer bezeichneten Hinweise beziehen sich auf die deutsche Bearbeitung von E. Hammer: Die Netzentwürfe geographischer Karten nebst Aufgaben über Abbildung beliebiger Flächen aufeinander von A. Tissot. Autorisierte deutsche Bearbeitung mit einigen Zusätzen, besorgt von E. Hammer. Stuttgart 1887.

[2] Bei Hinweisen mit Zöppritz-Bludau bezeichnet.

Behrmann, W., Zur Kritik der flächentreuen Projektionen. München 1909. — Zur Wahl der Projektion für Karten. In: Petermanns Mitteilungen 1910, II, Heft 3.

Gelcich, E., F. Sauter und P. Dinse, Kartenkunde, 3. Aufl., revidiert und erweitert von M. Groll. Leipzig 1910. (Sammlung Göschen Nr. 30.)

Willers, Th., Zur Geschichte der geographischen Flächenmessung seit Einführung des Planimeters. Ergänzungsheft 170 zu Petermanns Mitteilungen. Gotha 1911.

Das für die Messungen verwendete Kartenmaterial sowie die Bücher, aus denen Flußlängen, Grenzlinien u. dgl. entnommen sind, finden sich bei den Messungen angegeben.

Lebenslauf.

Als Sohn des Kaufmanns Eugen Mouths wurde ich am 6. Januar 1863 in Düsseldorf geboren und erhielt den ersten Schulunterricht auf dem dortigen Realgymnasium, das ich bis einschließlich Obersekunda besuchte. Hierauf arbeitete ich ein Jahr praktisch bei einem Landmesser, trat dann wieder in die Schule ein, und zwar in das Realgymnasium zu Mülheim a. Rhein, wo ich im März 1882 das Maturitätsexamen bestand. Unmittelbar darauf trat ich bei der Fußartillerie in Mainz ein, um auf Beförderung zu dienen. Im folgenden Jahre (1883) besuchte ich die Königliche Kriegsschule in Kassel und wurde nach bestandener Offiziersprüfung im Februar 1884 zum Leutnant befördert. Von Herbst 1885 bis Sommer 1887 besuchte ich die vereinigte Artillerie- und Ingenieurschule (jetzige Militärtechnische Akademie) in Charlottenburg. Zwischen dem zweiten und dritten Semester unternahm ich eine Studienreise nach den Normannischen Inseln. Von S.-S. 1886 bis einschließlich S.-S. 1887 hörte ich an der Universität Berlin Geographie und Geologie bei den Professoren v. Richthofen, Dames und Roth. Nachdem ich meinen Studiengang bei der genannten Militärtechnischen Lehranstalt mit Auszeichnung beendigt hatte, trat ich wieder zu meinem Regiment über und wurde ein Jahr später (1888) zur Artillerie-Prüfungskommission versetzt, wo ich vorwiegend mit schießtechnischen Versuchen und Berichten zu tun hatte. Im Jahre 1890 wurde ich auf meinen Wunsch zu den technischen Instituten der Artillerie nach Spandau kommandiert. Im Sommer 1891 erbat ich meinen Abschied aus dem aktiven Militärdienst unter Beförderung zum Oberleutnant und widmete mich nunmehr der Privatindustrie. Im Jahre 1896 legte ich noch die Dolmetscherprüfung im Französischen ab und wurde 1898 im Beurlaubtenstand zum Hauptmann befördert. Während dieser Zeit beschäftigte ich mich viel mit meiner Lieblingswissenschaft, der Erdkunde, nebst ihren Hilfswissenschaften, Topographie, Kartographie, Orometrie und Kartometrie. Auch hatte ich Gelegenheit, auf Reisen viele Länder Europas kennen zu lernen. Meine Kenntnisse vervollständigte ich auf der Westfälischen Wilhelm-Universität zu Münster und schließlich im Jahre 1911 auf der Universität zu Rostock. Hier bestand ich am 27. November 1911 das Rigorosum.

Fritz E. Mouths.